

论文题目 基于可能性理论和格论的

系统可靠性分析

学科专业 机械电子工程

学 号 200810802006

作者姓名 庞 煜

指导教师 黄洪钟 教授

分类号 _____ 密级 _____

UDC ^{注1} _____

学 位 论 文

基于可能性理论和格论的系统可靠性分析

(题名和副题名)

庞 煜

(作者姓名)

指导教师 黄洪钟 教授

电子科技大学 成都

(姓名、职称、单位名称)

申请学位级别 博士 学科专业 机械电子工程

提交论文日期 2012-10-09 论文答辩日期 2012-12-09

学位授予单位和日期 电子科技大学 2012 年 12 月 27 日

答辩委员会主席 _____

评阅人 _____

注 1: 注明《国际十进分类法 UDC》的类号。

SYSTEM RELIABILITY ANALYSIS BASED ON POSSIBILITY THEORY AND LATTICE THEORY

A Doctor Dissertation Submitted to

University of Electronic Science and Technology of China

Major: **Mechatronics Engineering**

Author: **Yu Pang**

Advisor: **Prof. Hong-Zhong Huang**

School: **School of Mechatronics Engineering**

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

作者签名： 庞煜

日期： 2012 年 12 月 30 日

论文使用授权

本学位论文作者完全了解电子科技大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权电子科技大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后应遵守此规定）

作者签名： 庞煜

导师签名： 黄洪钟

日期： 2012 年 12 月 30 日

摘 要

自可靠性工程技术在我国引起关注和重视的半个世纪以来，可靠性理论从 20 世纪 70 年代初对电子产品的研究扩展到航天、核能及通信等领域，80 年代以后可靠性工程得到全面迅速的发展。随着各种复杂结构系统的建立，实际工程中常常会遇到通过自然语言来表达模糊信息的情形，此时用概率论这一处理不确定性问题的传统方法难以完成对自然语言本质上的模糊性的描述。这就要求在可靠性理论中发展可能性理论，转换自然语言表示的命题，从而达到开展定量分析的目的。同时，由于常规的二态可靠性理论假设系统仅存在“完好”和“失效”两个状态，这是对实际情况的过度简化。专家学者们因此开展了对多状态可靠性理论的研究，大多数研究分析多状态系统的文献均假设系统和部件的状态集是全序集。进一步深入分析可知，由于系统状态之间可能存在的不可比性，这一假设局限了对实际系统和部件状态的描述。从而引发了以建立在偏序关系上的格来描述系统和部件状态集的系统可靠性研究工作的开展。

本文针对系统可靠性理论发展中亟待解决的关键问题，以解决认知不确定性和表达系统状态不可比性两个问题为出发点，基于可能性理论和格论对系统可靠性分析展开研究，其主要内容和创新性成果如下：

(1) 基于凸子格的概念延展对系统可能可靠性的理论研究。凸子格的定义由子集的凸性扩展而来。Cappelle 和 Kerre 博士在系统状态集为完备格的假设下提出关于格上同余关系的结构函数等价类。本文在此基础上引入凸子格的概念对系统进行可能可靠性分析，介绍基于格同余关系的结构函数上的等价类，随后得到等价类上的上下界集均为凸子格的结论，进而推出结构函数等价类的凸子格上下界集及其上下限，并讨论相关的定义和性质在理论中的意义和实际工程中的应用。不同的结构函数代表不同的系统结构，研究表明，可以通过现有的子系统（部件）状态与系统状态之间关系的信息缩小确定结构函数的范围，同时结构函数等价类的凸子格上下界集及其上下确界的确定使得在确定了观察集的基础上，可以比较本文所提出的结构函数与原等价类中结构函数的优劣，从而达到寻求优异的系统结构的目的。

(2) 基于可能性理论对多状态系统进行可能可靠性分析。为了克服由系统状态可能性分布难以获取的困难对系统可能可靠性分析构成的障碍，引入最大可能

剩余寿命来表征系统状态与剩余寿命之间的内在函数关系。系统状态对应的最大可能剩余寿命定义为该状态下系统保有最大可能的剩余寿命。通过这一定义搭建系统状态可能性分布与系统寿命可能性分布之间的桥梁，同时引入观测时刻这一变量，联系系统状态与其对应的最大可能剩余寿命之间的函数关系，重新定义多状态系统的可能可靠性函数。在此基础上利用系统寿命的可能性分布避开难以入手的系统状态可能性分布，实现对系统可能可靠性的分析。

(3) 对部分故障影响可忽略或可延迟的可修系统进行可靠性分析。基于维修理论中的实际问题，介绍部分故障影响可忽略或延迟的模型，以两部件并联可修系统为对象，给出原系统和考虑部分故障可忽略的新系统的模型假设，在原系统可靠性指标的基础上开展对部分故障可忽略的新系统的可靠性分析，给出并证明新系统可靠性指标的表达式。在基于可能性理论的对部分故障影响可忽略或延迟的单部件可修系统研究中，通过原有的模型假设建立新的系统模型，并对两个模型加以区分，进而具体针对部分故障影响可忽略或延迟的单部件可修系统新模型开展可能可靠性分析，得到系统的可能可用度。

(4) 对多状态系统在完备格框架下进行系统可靠性分析和可能可靠性分析。基于实际系统中可能存在的状态之间优劣不可比性，提出用建立在偏序关系上的完备格替换原有的全序集来描述多状态系统状态集。假设系统状态空间和部件状态空间均为完备格，以单部件系统、串联系统、并联系统和表决系统等典型系统为对象，分别基于概率论和可能性理论进行了系统可靠性分析和系统可能可靠性分析。

关键词：系统可靠性，凸子格，可能可靠性，故障影响可忽略或可延迟，多状态系统

ABSTRACT

Reliability engineering has aroused intensive attention in our country for the past half century. Reliability theory has been continuously developed and increasingly applied to a variety of industrial regions. It was first applied in electronic products during the early seventies; thereafter, reliability research was utilized in various fields such as aeronautical /space technologies, nuclear energy, and communication systems. As for the complex structure in practical engineering, natural language is widely used to convey the fuzzy information. It is observed that the traditional probabilistic method is difficult to handle the fuzzy characteristic within natural language. Therefore, there is an urgent need to develop possibility theory to transform the natural language proposition and carry out the quantitative analysis in reliability theory.

Currently, conventional binary reliability theory is based on the assumption that system state is limited by only two possible states: perfectly function and completely fail to function, which is an oversimplification of the practical situations. Based on this, experts and scholars introduced and developed the multi-state reliability theory. Considering the fact that system states are of incomparable characteristic in actual life, the original assumption of system and component state set being totally ordered set is difficult to completely describe the actual system or component states. As a further discussion, lattice theory is developed in system reliability research, which describes the partial order within system or component state space.

This dissertation aims to address key challenges and critical issues within the development of system reliability theory, and with a special emphasis on two fundamental aspects: epistemic uncertainty and system state's incomparable characteristic. Taking advantage of possibility theory and lattice theory, the primary research contributions and innovative achievements are summarized as follows.

1. Extence of system possibilistic reliability theory based on the concept of convex sublattice. The definition of convex sublattice is extended from the subset's convex structure. Supposing that system state set is a complete lattice, Doctor Cappelle and Kerre introduced the equivalence class of structure function on the basis of

congruence relation. Based on their work, this dissertation introduces the concept of convex lattice to the process of system possibilistic reliability analysis. As for the complete lattice composed of all the structure functions, it can be concluded that the upper (lower) bound set of structure function's equivalence class are the convex sublattice. Thus, the supremum and infimum of the upper (lower) bound set of structure function's equivalence class can be figured out. Different structure function stands for different system structure. It is proved that the scope of structure function can be narrowed through the observation set. As a result, the related definitions and properties turn out to be meaningful both in theoretical development and practical application. Meanwhile, the supremum and infimum of the upper (lower) bound set of structure function's equivalence class makes the comparison of structure functions becoming reality. Therefore, the goal of searching for better system structures is achieved.

2. Systematic investigation of possibilistic reliability function analysis for multi-state systems. It is difficult to perform the system possibilistic reliability analysis since it is difficult to obtain the system state possibility distribution. In order to overcome this difficulty, state corresponding Most Possible Residual Lifetime (shorted as MPRL) is introduced to represent the internal functional relationship between system state and residual lifetime. System state corresponding Most Possible Residual Lifetime (MPRL) is defined as the system's most possible remaining lifetime under the state, which bridges the gap between system state possibility distribution and system lifetime possibility distribution. Moreover, introducing the variable of investigated moment which links the system state and corresponding most possible residual lifetime, possibilistic reliability function of multi-state system is redefined. As a result, system possibilistic reliability analysis can be realized by system lifetime possibility distribution, while avoids the adoption of the inconvenient state possibility distribution.

3. Development of system reliability theory on the repairable systems with omitted or delayed failure effects. Within the practical problems in industrial engineering, the failure effects sometimes can be omitted or delayed if it has negligible effect on the system. Taking a two-unit parallel system on as the research theme, the model assumption of the new system with repair time omission is given based on the original system. New system's reliability indices can be presented on the basis of probability theory and system reliability theory. Afterwards, single-unit repairable systems with

ABSTRACT

omitted or delayed failure effects are analyzed in view of possibility theory. By differentiating between the original single-unit repairable system and the new single-unit repairable system with omitted or delayed failure effects, new system possibilistic reliability is analyzed and instantaneous possibilistic availability is obtained.

4. System reliability analysis for multi-state systems whose state set is modeled by complete lattice. Based on the existence of the incomparable system or component state, complete lattice on the partial order relation is adopted to substitute the totally ordered set to present the multi-state system state set. Supposing that system or component state space is characterized by complete lattice, typical systems such as a single-unit system, a series system and a parallel system are discussed based on probability theory and possibility theory, respectively.

Keywords: system reliability, convex sublattice, possibilistic reliability, omitted or delayed failure effects, multi-state system

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 不确定性的广泛存在和处理不确定性的数学方法	1
1.2 可靠性理论发展的历程.....	2
1.3 可能可靠性理论的研究现状.....	5
1.4 系统状态不可比性质提出的合理性以及研究现状.....	7
1.5 论文的研究内容.....	8
1.6 论文的主要结构.....	8
第二章 基于凸子格的可靠性理论研究	10
2.1 引言.....	10
2.2 格论的基础知识.....	11
2.2.1 偏序集的定义	11
2.2.2 格的定义和性质	12
2.2.3 结构函数的相关概念	13
2.3 基于凸子格的可靠性理论研究.....	14
2.3.1 基于格同余关系的结构函数等价类	14
2.3.2 结构函数等价类的凸子格上下界集及其上下限	15
2.3.3 阐释和讨论	18
2.4 算例分析.....	19
2.5 本章小结.....	22
第三章 基于可能性理论的多状态系统的可靠性分析	23
3.1 引言.....	23
3.2 可能性理论的基础知识.....	24
3.2.1 可能性分布	24
3.2.2 可能性测度和必要性测度	27
3.2.3 可能可靠性函数和对偶可能可靠性函数	29
3.3 多状态系统可能可靠性分析.....	30

3.3.1	模型假设	30
3.3.2	可能可靠性函数的再定义	31
3.3.3	系统状态与对应剩余寿命之间的关系	32
3.3.4	系统可能可靠性的计算分析	32
3.4	系统状态 α 和观测时刻 t_{im} 对系统可能可靠性分布的影响	33
3.4.1	给定系统的可靠水平状态	33
3.4.2	给定系统的观测时刻	34
3.5	典型系统的可能可靠性分析	35
3.5.1	串联系统的可能可靠性	35
3.5.2	并联系统的可能可靠性	36
3.5.3	串并联混合系统的可能可靠性	37
3.5.4	贮备系统的可能可靠性	38
3.6	数值算例	39
3.7	本章小结	43
第四章	部分故障影响可忽略或延迟的可维修系统可靠性分析	44
4.1	引言	44
4.2	部分故障影响可忽略的并联可维修系统可靠性分析	45
4.2.1	传统并联可修系统与可忽略失效的并联可修系统模型假设	45
4.2.2	部分故障可忽略的并联可维修系统可靠性指标分析	47
4.2.3	数值算例	50
4.3	部分故障影响可忽略或延迟的可维修系统可能可靠性分析	53
4.3.1	传统可维修系统与可忽略或延迟失效的可维修系统模型假设	53
4.3.2	部分故障影响可忽略或延迟的可维修系统可能可靠性指标分析	55
4.3.2.1	原系统可能可用度 $A_{\Pi}(t)$ 的数学表达式推导	55
4.3.2.2	新系统可能可用度 $\tilde{A}_{\Pi}(t)$ 的数学表达式推导	59
4.3.3	数值算例	61
4.4	本章小结	67
第五章	多状态系统在完备格框架下的可靠性分析	68
5.1	引言	68
5.2	完备格的定义和性质	69
5.3	系统的最小路集和最小割集的描述	71

5.4 以完备格描述多状态系统状态集的系统可靠性分析.....	73
5.4.1 完备格系统状态集的单部件系统可靠性分析	73
5.4.2 完备格系统状态集的串联系统可能可靠性分析	74
5.4.3 完备格描述系统状态集的并联系统可能可靠性分析	74
5.4.4 完备格描述系统状态集的 $k/n(G)$ 表决系统可能可靠性分析.....	75
5.5 数值算例.....	76
5.6 本章小结.....	80
第六章 结 论.....	81
6.1 本文的主要贡献.....	81
6.2 下一步工作的展望.....	82
致谢	84
参考文献	85
在学期间参与的项目研究	96
在学期间发表和录用的学术论文	97

图目录

图 2-1 不同的子集和与之对应的结构函数等价类之间的包含关系.....	15
图 2-2 等价类 $[\phi]_{\theta_A}$ 与 $[\phi]_{\theta_B}$ 的范围比较.....	21
图 3-1 系统寿命的可能性分布-例	31
图 3-2 系统状态与对应的最大可能剩余寿命的关系一例.....	32
图 3-3 不同的指定可靠水平状态对系统可能可靠性函数的影响.....	34
图 3-4 系统不同的观测时刻对系统可能可靠性函数的影响.....	35
图 3-5 串联系统的逻辑框图.....	36
图 3-6 并联系统的逻辑框图.....	36
图 3-7 串-并联系统的逻辑框图	37
图 3-8 并-串联系统的逻辑框图	38
图 3-9 贮备系统的逻辑框图.....	39
图 3-10 发动机在翼时间的可能性分布.....	40
图 3-11 发动机状态与其 MPRL 的关系	41
图 3-12 不同的观测时刻对系统可能可靠性的影响.....	42
图 4-1 原并联系统与部分故障可忽略的新系统之间的比较.....	47
图 4-2 原单部件系统与部分故障可忽略或延迟的新系统之间的比较.....	55
图 4-3 原单部件系统状态的发展进程.....	56
图 4-4 时刻 t 原系统处于维修状态而新系统处于工作状态的情形.....	60
图 4-5 原系统与新系统可能可用度的比较.....	66
图 5-1 音响系统的结构框图.....	68
图 5-2 处理节点各状态的功能效用劣化图示.....	77
图 5-3 分布式处理系统状态的序关系.....	78

表目录

表 3-1 发动机在翼时间的可能性分布	39
表 3-2 系统状态对应 MPRL	41
表 3-3 不同的系统可靠状态水平对系统可能可靠性的影响	42
表 5-1 分布式处理系统状态对应图	77

第一章 绪论

随着人类社会的不断进步和科学技术的迅猛发展，知识系统不断丰富和完善，人类认识能力不断提高，产品不断更新换代，现代系统和制造设备也日趋复杂和先进。实际工程系统中各种不确定性的广泛存在和复杂结构系统的建立促使人们探索新的可靠性理论和方法，将可能性理论和格论引入可靠性理论，从而分别对认知不确定性和系统状态的偏序关系进行描述就是一种新的探索。本章将概述可靠性理论的发展历程，介绍基于可能性理论和格论的可靠性研究的意义和研究现状以及本文的主要研究内容。

1.1 不确定性的广泛存在和处理不确定性的数学方法

随着科学技术的进步和人类社会的发展，自 20 世纪 40 年代开始对可靠性理论进行研究以来，经过半个多世纪的发展，工程可靠性与安全问题日益受到关注，可靠性方法逐步被工程接受，可靠性工程技术逐步在各个领域内得到发展和应用，并取得了丰硕的成果。随着科学技术的迅速发展以及各种复杂结构系统的建立，人们逐渐认识到在对一些复杂机电系统（如飞机、汽车等）进行可靠性分析时存在着大量不易处理的不确定性。不确定性主要体现在以下四个方面^[1]：

（1）材料参数的不确定性。由于制造环境、技术条件、材料的多相特征等因素影响，使工程材料的弹性模量、泊松比、质量密度具有不确定性。

（2）几何尺寸的不确定性。由于制造、安装或施工误差使结构的几何尺寸如梁、柱的横截面积、惯性矩、板的厚度等具有不确定性。

（3）载荷的不确定性。由于测量条件、外部环境等因素影响，使作用在结构上的载荷具有不确定性。

（4）结构边界条件的不确定性。由于结构的复杂性而引起结构与结构的联接、构件与构件的联接等边界条件具有不确定性。

这些不确定性现象往往难以给出确定性的解释。从数学的角度出发，不确定性可分为三类：随机性、模糊性和不完善性。随机性是以不确定信息的变化特征清晰已知为前提，由于输入信息无法完全控制和预测所引起的。而模糊性不仅存在无法预测的偶然因素，对不确定信息变化的特征也无法准确描述和表达。不完

善性则是由于对信息的缺乏而导致的，如对机器的结构或是运行的过程的不了解所导致的不确定性。按照产生机理和物理意义的不同，一般可将实际工程中的不确定性因素分为两类^[2]：一类是随机不确定性（Aleatory Uncertainty），或称固有不确定性（Inherent Uncertainty），这类不确定性是由于条件不充分而导致结果的不可预知，不能通过搜集更多的数据或信息减少或消除这种不确定性，这是事物客观存在的内在固有的特性，如结构的材料参数、几何尺寸及载荷的随机性^[3-5]；另一类是认知不确定性（Epistemic Uncertainty），或称主观不确定性（Subjective Uncertainty），这类不确定性的背景是关于不确定性变量的统计数据信息不足，其准确的概率分布无法获得。由于认知不确定性的产生由缺少信息而导致，它可以通过知识的累积和数据的收集来减少。认知不确定性广泛存在于结构的材料特性、几何特征等方面^[6-9]，同时也存在于对系统可靠性研究的过程中，如对初始事件、故障树、事件树等的信息和理解不足^[10]，近年来受到学术界和工业界的密切关注^[11,12]。从数学角度出发的模糊性和不完善性这两种不确定性在工程中都归为认知不确定性，都是由于信息的缺乏而导致的不确定性。由于忽视这些不确定因素而导致的灾难性事故让人们意识到应该在实际工程中对其予以充分考虑。

研究不确定性的数学理论主要有概率论、模糊数学理论^[13-15]、证据理论^[16-18]、区间分析^[19]和可能性理论^[20,21]等。概率论主要用于处理随机不确定性这类可以通过试验寻求事件发展的规律来弱化其不确定程度，亦是当数据充分便足以得到概率密度函数的不确定性。而模糊理论、凸集模型、证据理论、区间分析和可能性理论则用于处理认知不确定性。其中，可能性理论是模糊理论的一个分支，同时，概率论和可能性理论都可以归结为证据理论的两种特殊形式^[17,18]。

1.2 可靠性理论发展的历程

常规可靠性理论是建立在概率论基础之上的，这种方法已被工程界广泛接受和采用，如一次二阶矩（FOSM）方法、响应面方法和蒙特卡洛模拟方法等^[22-27]。

一次二阶矩法的概念最早是 1947 年由前苏联的尔然尼钦所提出的。1969 年，Cornell^[28]提出用可靠性指标 β 作为度量结构安全度的统一标准。一次二阶矩法针对线性的结构功能函数利用变量的一阶矩（均值）和二阶矩（方差）进行可靠性计算，对于非线性的结构功能函数，在变量的均值点处进行一阶泰勒展开，转化为线性的结构功能函数。由于在均值点处对结构功能函数进行泰勒展开，所以又称为均值一次二阶矩法或中心点法。事实上，对于非线性的结构功能函数，中心

点法的计算结果误差很大，同一个问题中可能获得两个不同的可靠性指标 β 值。进一步，Hasofer、Lind、Rackwitz 和 Fiessler 等^[29,30]提出了改进的一次二阶矩法（AFOSM，又称为验算点法）。1974 年 Hasofer 和 Lind^[29]假设变量服从正态分布给出了可靠性指标，1978 年 Rackwitz 和 Fiessler^[30]考虑随机变量的实际分布，提出了“当量正态化”方法。由于中心点法在非线性的结构功能函数线性化的过程中得到了误差较大的线性化结构功能函数，最终导致计算出的可靠性指标误差较大。验算点法在此基础上做了改进，并不将非线性结构功能函数的线性化点指定为变量均值点，而是依据设计验算点计算可靠性指标 β ，若可靠性指标值未达给定精度，便对原有的设计验算点进行修改并再一次迭代，直到可靠性指标值满足给定的精度条件。

响应面法主要有一次响应面法和二次响应面法，其主要思想是对于工程实际结构中通常为隐式状态方程的极限状态函数，用简单的显式函数去逐步逼近，最终达到简化可靠度计算的目的。1951 年 Box 和 Wilson^[31]首先提出响应面法，利用统计的方法得到近似函数去逼近复杂的隐式函数。而后 Wong^[32]利用响应面法对土坡稳定的可靠度问题进行分析，展开了响应面法在可靠性理论中的应用。随后 Bucher 和 Bourgund^[33]基于结构可靠性问题引入一种新的自适应插值方法得到高效的响应面法。该方法利用变量的基本统计信息（均值和方差）来提高效率和准确性。Rajashekhar 和 Ellingwood^[34]简要介绍了响应面方法并严格评估了对结构分析中实验点位置优选的各种方法，提出首次迭代后实验数目的减少标准。Liu 和 Moses^[35]提出一种新的序列响应面方法并应用于飞机结构系统的可靠性分析中。Kim 和 Na^[36]对序列响应面方法提出改进，利用向量的梯度投影法在原破坏面附近选取采样点作响应面近似。该方法摒弃蒙特卡洛算法中常用的二次响应面函数而提倡 Rackwitz-Fiessler 算法中的线性响应面函数。Youn 和 Choi^[37]为了缓解由于设计灵敏度分析的无效或大规模的原因导致可靠性设计优化成本昂贵的困难，将响应面方法引入可靠性设计优化领域，结合混合均值方法介绍一种新的响应面方法，提出新的有效的可靠性设计优化方法。Gavin 和 Yau^[38]在响应面方法中使用高阶多项式去近似极限状态，利用高阶极限状态函数进行结构可靠性分析。

蒙特卡洛法又称随机抽样法或统计试验法，是通过对随机变量进行大批抽样，并代入结构功能函数中确定结构失效与否，得到结构失效次数与总抽样次数，从而算得结构的失效概率或可靠性指标。事实上，人们认为蒙特卡洛法是一种精确度较高的计算方法，往往将其他近似计算方法的结果与蒙特卡洛法得到的结果相比较，以验证其他近似方法的准确性。然而，如果模拟计算的次数太少，则算得

的可靠性指标不稳定也无法达到精度的要求。文献[39]建议结构计算次数 N 大于等于 $100/P_f$, P_f 表示预估的失效概率。若要求工程结构的失效概率在 0.1% 以下, 则要求计算次数达到 10 万次以上, 计算工作量非常大。为了提高抽样效率, 减小计算工作量, 许多学者对其进行了研究并对其加以改进^[40-45]。

随着常规可靠性方法日趋完善, 人们也认识到概率可靠性理论由于其数学基础的局限性, 使得其在工程应用中存在着许多障碍, 常规可靠性理论与工程实践的矛盾日益突出。常规可靠性理论存在着两个过于简化的假设^[46]:

(1) 概率假设: 系统失效行为可以完全用概率测度来刻画。

(2) 二值状态假设: 将系统的可能状态分为完好或故障两种情形。

但在实际的工程问题中, 由于无法得到大量具有概率重复性并具有较好分布规律的样本, 同时系统的复杂性导致数据难以采集, 且复杂系统的状态往往并不满足二值状态假设。近年来, 随着人们对系统不确定性的进一步深入研究, 基于处理认知不确定性的不同数学方法建立了不同的可靠性分析方法。

用于处理不确定性的区间分析是由 Moore 在 1966 年提出的^[47], 他用区间数来描述运算过程中所涉及的量, 同时利用有效的数值计算方法得到计算量的区间表示。1979 年 Moore^[48]进一步将区间分析应用到实际领域。基于区间的非概率可靠性分析是采用区间变量(区间数)来描述结构中不确定性的可靠性分析方法。1995 年, Ben-Haim^[49]基于非概率可靠性的概念^[50]将区间分析应用到非概率可靠性理论中, 将非概率可靠性指标视为区间变量(区间数), 得到可靠指标的区间表述。随后, 郭书祥等在文献 [51] 中由结构的失效准则确定功能函数 $M = g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 基于区间分析将结构性能的变化范围与要求的变化范围相比较, 确定结构的安全程度; 文献[52]假设功能函数中同时存在随机变量和区间变量, 建立了概率与非概率混合可靠性模型, 给出结构可靠性的概率度量; 文献[53]考虑参量的不确定性, 提出了非概率结构体系主要失效模式的枚举原则, 通过增量载荷法确定主要失效模式, 生成各主要失效模式的极限状态方程, 利用非概率条件下的准则法选取临界载荷, 使枚举出的少量主要失效模式中不漏掉最危险失效模式; 文献[54]研究区间变量的一般运算并给出非概率可靠性指标的三种可能的求解方法: 定义法、转换法和优化法。同时, 针对输入变量的变化区间增大导致相应量的安全变化区间不精确的问题, 吕震宙等^[55]提出改进的区间截断法, 得到较精确的系统非概率可靠度指标。孙海龙等^[56]基于区间分析方法, 对串联系统、并联系统、先串后并系统、先并后串系统、表决系统等典型系统进行区间可靠性分析, 得到了典型系统的区间可靠度和点可靠度之间的准一致性。

凸集模型是函数的集合，每一函数表示不确定事件的一个可能的实现。凸集模型的建立只需要不确定事件集合的界限，而不要求其内部结构，从而对已知数据信息的要求较低^[57]。Ben-Haim^[58]等通过凸集模型定义不确定变量，提出一种未知但有界的非完整性模型，用优化技术求解应用力学中的分析和设计问题，并在1994年提出基于凸集模型的非概率可靠性^[50]，减小概率模型中由于数据不足致使概率可靠性对模型中微小不精确的敏感。Elishakoff^[59]等基于凸集模型对粘弹性结构的材料不确定性进行理论建模，研究了粘弹性梁的受迫振动问题；分别用随机的和非随机的方法对初始缺陷敏感结构的非线性屈曲做了对比研究^[60]；结合概率方法和凸集模型对数据缺失的不确定性进行分析^[61]。Ben-Haim 在文献[62]中利用椭圆形的凸集模型评估最大脉冲响应，系统地分析壳体径向脉冲屈曲研究中的不确定性。文献[63]考虑线性动态系统输入变量和输出失效状态的不确定性，利用分离超平面定理将凸集模型用于系统的非概率可靠性评估，考察系统在失效前能承受的 uncertainty 量。文献[64]给出了五种凸集模型表达输入变量的不确定性，导出凸集模型最大响应的解析表达，研究了线性系统的非概率可靠性。研究表明，传统的无论是确定性工具还是随机性方法，都可能导致不安全的设计决策。

1.3 可能可靠性理论的研究现状

基于可能性理论的可靠性分析主要有两个分支：一是由蔡开元^[65-69]提出的 Posbist 可靠性理论；一是由 Cappelle 和 Kerre^[70-77]提出的结合可能性理论和多态结构函数理论的可能可靠性分析方法。

Posbist（能双）可靠性理论建立在如下的两个假设之上：

- (1) 可能性假设：系统可靠性行为完全可以在可能性范畴加以刻画。
- (2) 二值状态假设：将系统的可能状态分为完好或故障两种情形。

系统的 Posbist 可靠度定义为系统在给定条件和预先确定的时间内完成规定功能的可能度。实际上，Posbist 可靠度的定义和传统的可靠性的定义是相平行的，唯一的区别就在于测度选取的不同，前者选取可能性测度来量化不确定性，后者选取概率测度。随后在1996年，Utkin 等^[78]根据能双可靠性理论，通过模糊可靠性分析提出了一般系统的能度可靠性方法。1997年，Cremona 等^[79]基于可能性理论，提出了一种与传统概率可靠性模型相似的结构模糊可靠性度量体系及分析方法，该方法致力从概念上与概率论保持相同的数字特征。2002年，郭书祥等^[80]基于可能性理论和模糊区间分析，利用区间非概率可靠性的度量原则和方法，提出

了一种新的能度可靠性模型。Posbist 可靠性模型为处理大型复杂系统的可靠性提供了可行的方法。作为一种新生的理论，无论在理论完善还是在实际应用方面，都有许多工作要做。

在 Cappelle 和 Kerre 博士提出的可能可靠性理论分支中，他们基于 Zadeh 的可能性理论^[81]，结合多状态结构函数理论来分析系统可靠性和元件可靠性^[70,82,83]。假设所有的状态空间都是基于良序关系的单位区间，通过计算机辅助可靠性分析（Computer Assisted Reliability Analysis, CARA）研究系统及其元件的多态特征。他们通过在系统结构函数的（对偶）截集之上建立（对偶）可能可靠性函数，得到某一指定的 α 水平下相应的工作可能度（Possibility of Functioning）和失效可能度（Possibility of Failure），用于分别分析系统的工作面和失效面。他们提出的结合可能性理论和多状态结构函数理论的可能可靠性分析方法主要有两个立足点：一是由于概率论处理主观的认知不确定性所存在的局限性，采用了可能性测度对不确定性进行量化；二是由于在结构的可能可靠性分析中，线性序集作为系统的状态集不能完全地模拟状态之间的偏序关系，采用了格这一代数系统对系统状态进行有效的描述。与能双可靠性模型不同的是，他们研究的系统不局限于二值状态中系统只有完好和失效两种状态的假设，其多状态的性质同时体现在子系统和系统之上。他们基于格论^[84]提出了完备格状态空间结构函数理论与可能性理论相结合的可靠性分析方法。结合完备格中任一非空子集都具有上下确界的性质，Cappelle^[70]提出将多状态函数结构的状态空间定义在完备格上进行研究，解决了诸多由二分模型引发的问题，并利用格论的逆序关系提出对偶测度^[71]，又在文献[72]中对可能可靠性函数的性质进行研究，给出一系列具有现实意义的边界条件。Montero 等^[73]在此基础上通过理论和具体实例说明可靠性理论与格论之间有着密切关系。完备格解决了实际情况中完备链无法解决的元素不可比的问题。在此基础上，Cappelle 和 Kerre^[74]给出了可能可靠性函数与结构函数相互独立的定义，从理论上进一步完善了可能可靠性理论；他们在文献[75]中提出基于结构函数的观察集，为可能可靠性函数的分析提供了依据；紧接着在文献[76]中给出一种可能可靠性函数的智能优化算法，在可靠性分析中起到优化数据的作用。相对于其他的可靠性理论，基于格论和可能性理论的可靠性理论研究尚处在起步和探索阶段，尽管如此，由于格论中数学模型对工程指导意义的优势所在，促进了可靠性理论的完善和发展。

1.4 系统状态不可比性质提出的合理性以及研究现状

由于传统可靠性理论中部件和系统只有完好和失效两种状态，而两状态的假设不适于现实情况中对复杂系统和部件状态的描述，因此 Barlow 和 Wu^[85]基于最小路集和最小割集的概念给出了一般多状态系统的概念，并将两状态系统中的性质推广到多状态系统中去；El-Newehi 等^[86]考虑系统和部件可能呈现有限个状态，给定完好状态和失效状态，从两状态单调关联系统的定义引入多状态单调关联系统的定义。

近三十年来，有关专家学者开展了对多状态系统理论的研究^[87-94]。他们的工作大多基于一个假设：系统和部件的状态集是全序集，即系统（部件）的各个状态能够依照其相应的功能水平的下降排成一个序列。以单位区间 $[0, 1]$ 为例，假设 1 表示系统（部件）的完好状态，0 表示系统（部件）的完全失效状态，系统（部件）状态集中的各个状态即表征从完好状态 1 逐次衰退到完全失效状态 0 的各级功能水平。这一假设的确能够简化可靠性计算中的推理，在对系统可靠性的评估、优化和预测过程中发挥了重要作用；但若系统（部件）存在两种或两种以上失效类型，且对不同失效类型之间的状态无法进行排序，此时全序集便无法完全诠释系统状态集的特征。这一特征称为系统状态不可比的性质。

基于全序集对实际系统状态集刻划的困难，有关专家学者展开对多状态可靠性理论的进一步探索。Caldarola^[95]以布尔变量来描述部件状态，以一系列多状态故障树来对多状态系统进行刻划。Wood^[96]在此基础上分析多状态系统，用因式分析法处理布尔变量的相关性得到系统状态的概率值，Veeraghavan 等^[97]利用容斥公式得到概率表达式，Zang^[98]基于二元决策图对具有多状态部件的多状态系统进行分析。此外，Yu 等^[99]假设系统（部件）状态集为偏序集，定义了一般多状态单调关联系统，并对其结构性质和随机性质进行分析，给出了系统可靠性的上下界。Pham^[100]对具有两种失效模式的系统可靠性优化进行探讨；Kolowrocki 等^[101]针对具有老化元件的多态串联系统、并联系统、表决系统等典型系统定义了均值和方差，介绍了可靠性分析的方法；Bichon 等^[102]针对多种失效模式的系统给出了一种基于代理模型的可靠性估计方法。

1.5 论文的研究内容

本文在对系统的可靠性分析中,沿用 Cappelle 和 Kerre 提出的结合可能性理论和多状态结构函数理论的可能可靠性分析方法的思想,将可靠性分析建立在可能性理论和格论上进行。采用可能性理论来处理工程中的认知不确定性;采用格论来完善对系统或部件状态之间可能存在的偏序关系的表达,这一关系是以线性序集描述系统状态集时不能完全模拟的。本文拟基于这两点核心思想,应用可能性理论和格论对系统可靠性进行分析,推进可能性理论和格论在可靠性理论中的应用和发展,其主要研究内容如下:

(1) 基于凸子格的可靠性理论研究。结构函数是对系统结构的表征,它的定义在工程中具有重要的意义。本文拟通过引入凸子格的概念,在对基于格同余关系的结构函数等价类划分过程中,达到对结构函数之间优劣性的比较。

(2) 基于可能性理论的多状态系统可靠性分析。对于多状态系统的可能可靠性分析问题,本文拟通过对系统所处状态与之取最大可能性的最长剩余寿命建立合理的函数关系,将可能可靠性定义中涉及的在具体实例中难以处理的状态的可能性分析转化为一定条件下对系统寿命可能性的分析,将可能可靠性分析方法运用到实际的例子中。

(3) 对部分故障影响可忽略或可延迟的可维修系统可靠性分析。可维修系统的实际工程中往往会涉及一些短暂的故障对系统的失效影响可以延迟甚至忽略的情形。本文拟基于这一工程实际对理论系统建立模型,系统地开展可靠性分析和可能可靠性分析。

(4) 对多状态系统在完备格框架下的可靠性分析。对于系统状态不可比的实际情况,本文拟通过利用门限状态集将系统状态集进行划分,避开使用截集这一在状态不可比的假设下无法使用的概念,实现对完备格框架下系统的可靠性分析。与此同时,拟基于可能性理论和格论同时分析系统可靠性,将两者融合在一个系统中,达到对多状态系统进行可能可靠性分析的目的。

1.6 论文的主要结构

本文共分为六章:

第一章为绪论,主要介绍本文研究的背景、意义、现状以及主要研究内容。

第二章首先介绍格论的基础知识，格论是描述多状态系统状态集的理论基础。随后介绍结构函数和格上的同余关系等概念，在格论的基础上对多状态系统结构函数进行探讨。基于格同余关系的概念研究系统结构函数等价类的凸子格上下界集。

第三章首先介绍可能性理论的基础知识，可能性理论是本文用以研究系统可靠性所依靠的主要方法和手段。而后以传统的多状态系统为对象，重新定义多状态系统的可能可靠性函数，利用系统寿命的可能性分布对其进行分析，基于可能性理论从系统状态结构函数的思想出发完成对可能可靠性函数的分析和计算。

第四章介绍部分故障影响可忽略或延迟的系统新模型，首先以两部件并联马尔科夫系统为对象，在原系统可靠性指标的基础上对部分故障可忽略的两部件并联新系统进行可靠性分析；而后介绍单部件可维修系统的原有模型假设，建立部分故障影响可忽略或可延迟的单部件可维修系统新模型，基于可能性理论开展可能可靠性分析。

第五章介绍完备格的性质，以完备格描述系统状态集。假设系统存在两种或两种以上失效类型，且对不同失效类型之间的状态无法进行排序，用最小路集和最小割集对状态集为完备格的系统进行描述。将可能性理论与格论相结合，分别对以完备格描述系统状态集的单部件系统、串联系统、并联系统和表决系统进行可靠性分析和可能可靠性分析。

第六章对本文的研究工作进行总结，分析研究工作中的不足之处，并对今后的研究工作进行展望。

全文围绕处理认知不确定性和表达系统状态不可比性两个基本问题，展开以可能性理论和格论为理论基础的系统可靠性探索研究，为开展基于多状态结构函数理论的系统可能可靠性分析在实际工程中的应用提供理论基础，致力于进一步开展理论与工程实际相结合的工作。

第二章 基于凸子格的可靠性理论研究

2.1 引言

随着现代系统和设备日趋复杂，失效过程中的多状态特征也体现的越来越显著，于是传统的二态可靠性理论中假设系统状态和部件状态要么完好要么失效的不合理性日益彰显^[103-105]。在此背景下，有关专家学者提出用多状态结构函数来模拟失效过程中因失效规律和工作性能不同而呈现出来的不同的部件状态与系统状态之间的函数关系^[106,107]。与此同时，由于实际工程中实验条件的局限，人们往往无法得到充足的统计数据。当系统的不确定性变量缺乏大量和必要的信息，无法获得其准确的概率分布时，概率论需要大量统计数据的局限性便体现出来，这使得概率论无法准确地对系统的不精确性和不确定性进行描述^[75,108]，认知不确定性便随之产生。国内外学者们均开展了大量基于非概率的可靠性评估模型的研究，以克服过去研究中的缺陷^[109-113]。可能性理论作为与概率论平行的处理不确定性的数学理论之一，已被广泛采用于分析可靠性工程中的认知不确定性^[114-117]。鉴于可能性理论在研究分析系统不确定性的过程中起到的举足轻重的作用^[118,119]，本文采用可能性理论作为分析复杂系统可靠性方面的认知不确定性的方法和手段。

在对系统失效过程中的多状态特征进行描述的过程中，为了更加完善的表达系统或部件的状态空间，有必要在非经典的可靠性数学模型中引入代数系统中的格论^[73]。格是一类重要的偏序集，考虑以完备格表达的状态函数集，文献[72]和[82]已经给出了进行系统可靠性分析的基本框架。Cappelle 博士提出了建立在偏序集（更特殊的则是完备格）上的多状态结构函数理论来解决二分模型中出现的问题。将多状态结构函数和可能性理论相结合，Cappelle 和 Kerre 博士建立了以完备格表达的状态函数集上的同余关系，这一关系结合了可靠性理论中的若干概念并为建立物理系统模型提供了有力的工具。本章基于可能性理论和系统多状态的假设，假设系统的状态函数集为完备格，在 Cappelle 和 Kerre 博士提出的同余关系的基础上引入凸子格的概念进行系统可靠性分析，给出结构函数上的等价类，得到等价类上的上下界集均为凸子格，进而推出结构函数集的一些重要边界，讨论相关的定义和性质在理论和实际工程中的应用。

2.2 格论的基础知识

格是一类重要的偏序集，它的理论研究深入到数学的各个分支，在许多领域中（如抽象代数、射影几何、点集论、拓扑学、泛函分析、逻辑与概率论等）都有广泛的应用。格论是描述多状态系统状态集的理论基础，本节主要从偏序集的定义出发，介绍格的一些基本概念和性质^[84]。

2.2.1 偏序集的定义

偏序关系是一类重要的二元关系，偏序集是带有偏序关系的集合。

定义 2-1 设 P 是一个集合， P 上的二元关系 \leq 叫做一个偏序关系（或半序关系），如果满足：

- (1) 自反性： $\forall a \in P, a \leq a$
- (2) 反对称性： $\forall a, b \in P, a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$
- (3) 传递性： $\forall a, b, c \in P, a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

这时称 (P, \leq) （或简称 P ）为一个偏序集（或半序集）。

若偏序集 (P, \leq) 是有限集，则叫做有限偏序集；否则， (P, \leq) 叫做无限偏序集。符号“ \leq ”用于表示一个二元关系，它与数的小于等于符号形式相同，但可以根据上下文确定而不会混淆。

定理 2-1 设 \leq 是集合 P 上一个偏序关系， \leq 的逆关系 \leq^{-1} 的定义如下：

$\forall a, b \in P, a \leq^{-1} b \Leftrightarrow b \leq a$ ，则 \leq^{-1} 也是 P 的一个偏序关系。

在定理 2-1 中，称偏序集 (P, \leq^{-1}) 是偏序集 (P, \leq) 的对偶，简记作 P^{-1} 。

下面介绍偏序集的一些基本概念。

定义 2-2 设 (P, \leq) 是一个偏序集， A 是 P 的一个非空子集， $a \in A$ 。若对任意的 $x \in A$ ，有 $x \leq a$ ，则称 a 是 A 的一个最大元；同时，若不存在 $y \in A$ ，使得 $a < y (a \neq y)$ ，则称 a 是 A 的一个极大元。同样，可以对偶地介绍最小元和极小元的定义。

由定义易知，集合的最大元（最小元）一定是集合的极大元（极小元），而反之不一定为真。

定义 2-3 偏序集 (P, \leq) 的最大元若存在，则叫做 P 的单位元，用 I 表示。偏序集 (P, \leq) 的最小元若存在，则叫做 P 的零元，用 O 表示。 I, O 统称为 P 的泛界。

可以证明，假设 A 是偏序集 (P, \leq) 的一个非空子集，若 A 有最大元（最小元），

则是唯一的最大元（最小元）；若 A 是有限子集，则一定有极大元（极小元）。

2.2.2 格的定义和性质

定义 2-4 在一个偏序集 (L, \leq) 中，如果任意两元 x, y 都有上确界 $x \vee y$ 和下确界 $x \wedge y$ ，则称偏序集 (L, \leq) 为一个格。

此时的 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 分别称作 x 与 y 的并和交。可以证明，若集合 L 是格，则 L 的对偶 (L^{-1}) 也是格，即格的概念是自对偶的。同时 L 中的任意非空有限子集有上确界和下确界。

事实上，由格的定义可以得到，若 L 是一个格， L 中任意两个元素 x, y 的并 $x \vee y$ 和交 $x \wedge y$ 可以唯一确定。故而 L 亦是一个带有二元运算 \vee, \wedge 的代数系，可以不用偏序而直接用两元间代数运算的并和交来定义。

定理 2-2 在格 (L, \leq) 中，对任意 $x, y, z \in L$ ，有

- (1) 幂等律： $x \wedge x = x, x \vee x = x$ ；
- (2) 交换律： $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$ ；
- (3) 结合律： $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$
 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ；
- (4) 吸收律： $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$ 。

由定理 2-2 可以看出，格是带有二元运算 \vee, \wedge 且具有幂等律、交换律、结合律和吸收律的代数系统^[121]。

推论 2-1 在格 (L, \leq) 中，对任意 $x, y, z \in L$ ，若 $x \leq y$ ，则 $x \wedge z \leq y \wedge z$ ， $x \vee z \leq y \vee z$ 。

这表明，格中的并运算和交运算是保序的。

推论 2-2 在格 (L, \leq) 中，对任意 $x, y, z \in L$ ，有

- (1) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ；
- (2) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ 。

这表明，在格的代数框架下，分配不等式成立。

推论 2-3 在格 (L, \leq) 中，对任意 $x, y, z \in L$ ，若 $x \leq z$ ，则 $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ 。

这表明，在格的代数框架下，模不等式成立。

定义 2-5 设 S 是格 (L, \leq) 的一个子集，若对任意 $a, b \in S$ ，总有 $a \wedge b \in S$ ， $a \vee b \in S$ ，则称 S 为格 L 的子格。

由子格的定义，可以得到如下的一些简单性质：

- (1) 空子集 Φ 是格 (L, \leq) 的子格；
- (2) 格 (L, \leq) 的单元子集 $\{a\} (a \in L)$ 是 L 的子格；
- (3) 格 (L, \leq) 的任意区间 $[a, b] (a, b \in L, a \leq b)$ 是 L 的子格；
- (4) 任意多个子格的交集仍是一个子格；

(5) 若 S 为格 L 的子格，则 S 作为子偏序集本身也是格，并且对任意 $a, b \in S$ ， a 与 b 在 S 内的上（下）确界同它们在 L 内的上（下）确界是一致的。

设 S 是格 (L, \leq) 的子集，若对任意的 $a, b \in S, a \leq b$ ，总有 $[a, b] \subseteq S$ ，则称子集 S 具有凸性。凸子格的定义便是由子集的定义延展而来的^[122]。

定义 2-6 格 L 的一个子集 S 叫做 L 的一个凸子格，如果满足：

$$(\forall a, b \in S) ([a \wedge b, a \vee b] \subseteq S) \quad (2-1)$$

格 L 的非空凸子格的交集仍是凸子格。对格 L 中的任意两个元素 $a, b \in L, a \leq b$ ，区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ 即是格 L 的一个凸子格。

在此给出完备格的定义，关于完备格的性质讨论将在第五章详细的给出。

定义 2-7 格 (L, \leq) 叫做一个完备格，如果 L 的任意非空子集 S 都有上确界 $\vee S$ 和下确界 $\wedge S$ 。

由完备格的定义易知，一个格若是有限的，那就一定是完备格。一个完备格 (L, \leq) 一定有泛界（单位元 I 和零元 O ），且完备格的对偶也是完备格。设 S 是格 (L, \leq) 的子集，若 S 是完备格，则称 S 为 L 的一个完备子格。

2.2.3 结构函数的相关概念

本节介绍与完备格上的多状态结构函数相关的基础概念。考虑由有限的 n 个部件构成的系统，首先给出结构函数的概念，它反映了部件状态与系统状态之间的函数关系^[75]。

定义 2-8 令 $(L_i, \leq), 1 \leq i \leq n$ 和 (L, \leq) 分别为 $n+1$ 个完备格， ϕ 是 $L_1 \times \cdots \times L_n - L$ 上的映射，若 ϕ 满足以下两个条件：

$$(1) \phi(0, \dots, 0) = 0, \quad \phi(1, \dots, 1) = 1 \quad (2-2)$$

$$(2) (\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (L_1 \times \cdots \times L_n)^2) (\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{y})) \quad (2-3)$$

则称 ϕ 是 $(L_1 \times \cdots \times L_n, \leq)$ 到 (L, \leq) 上的结构函数。

$\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L)$ 记为完备格 $(L_1 \times \cdots \times L_n, \leq)$ 到完备格 (L, \leq) 上的所有结构函数的集合，可以证明，结构函数集 $\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L)$ 是一个完备格^[70]，其上的序关系

定义如下：

对于任意两个 $L_1 \times \cdots \times L_n - L$ 上的结构函数 ϕ_1 和 ϕ_2 ，有：

$$\phi_1 \preceq \phi_2 \Leftrightarrow (\forall x \in L_1 \times \cdots \times L_n) (\phi_1(x) \leq \phi_2(x)) \quad (2-4)$$

在此不再介绍更多的有关结构函数上完备格的性质，如有兴趣可以参阅文献 [70]。

下面介绍同余关系的概念，本章中所有的等价类都基于该同余关系提出。

定义 2-9 令 (L, \leq) 为一个格， θ 是 L 上的二元关系；则 θ 是 L 上的同余关系当且仅当：

(1) θ 是 L 上的等价关系；

(2) 对于 L 中的任意元素 x_1, x_2, y_1, y_2 ，

$$x_1 \in [y_1]_\theta, x_2 \in [y_2]_\theta \Rightarrow x_1 \wedge x_2 \in [y_1 \wedge y_2]_\theta, x_1 \vee x_2 \in [y_1 \vee y_2]_\theta \quad (2-5)$$

定义中， $[x]_\theta$ 表示由元素 x 基于等价关系 θ 生成的等价类。格 (L, \leq) 上的下（上）确界算子由 \wedge (\vee) 表征，结构函数集上的下（上）确界算子由 \cap (\cup) 表征；即是说，对任意两个结构函数 ϕ_1 和 ϕ_2 ，有：

$$\phi_1 \cap \phi_2 : L_1 \times \cdots \times L_n \rightarrow L : x \mapsto \phi_1(x) \wedge \phi_2(x) \quad (2-6)$$

类似地，可以定义上确界算子 \cup 。

2.3 基于凸子格的可靠性理论研究

在凸子格定义的基础上，本节利用 Cappelle 和 Kerre 博士提出的两个有关结构函数基于同余关系的等价类的定理，给出凸子格在可靠性理论中应用得到的四条定理和性质并加以证明。最后，对之在实际可靠性工程中应用的重要性加以阐释。

2.3.1 基于格同余关系的结构函数等价类

本小节中所介绍的两个引理是由 Cappelle 和 Kerre 博士在文献 [75] 中提出的。引理 2-1 提出结构函数集中典型的一类等价类，基于等价类的分类，不同的子集即对应不同的观察集。引理 2-2 描述了不同的子集和与之对应的结构函数等价类之间的包含关系。这两个引理 [75] 将为下一小节中结构函数等价类的凸子格上下界集的推导奠定基础。

引理 2-1 设 A 是 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 上的一个子集， ϕ 和 φ 是 $L_1 \times \cdots \times L_n - L$ 上的任意两个结构函数，则有：

$$\varphi \in [\phi]_{\theta_A} \Leftrightarrow (\forall x \in A) (\varphi(x) = \phi(x)) \quad (2-7)$$

引理 2-2 设 A 和 B 是 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 上的两个子集, ϕ 是 $L_1 \times \cdots \times L_n - L$ 上的任一结构函数, 则有:

$$A \subseteq B \Rightarrow [\phi]_{\theta_B} \subseteq [\phi]_{\theta_A} \quad (2-8)$$

可以由图 2-1 直观地理解引理 2-2 的意义。即是说, 如果有更大的观察集, 可以通过观察集得到更多的信息, 从而缩小对合适的结构函数进行筛选的范围。

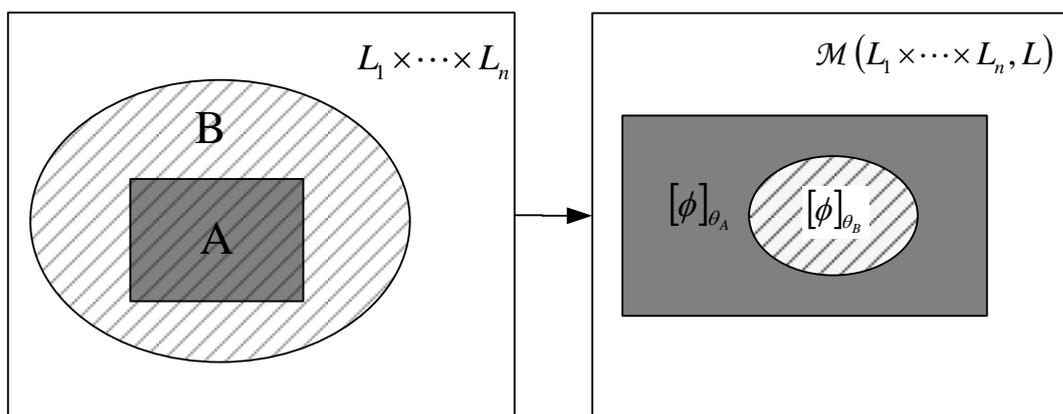


图 2-1 不同的子集和与之对应的结构函数等价类之间的包含关系

2.3.2 结构函数等价类的凸子格上下界集及其上下限

将凸子格的概念引入可靠性理论的研究, 获取结构函数等价类的凸子格上下界集及其上下限。这里所涉及的在实际工程中具有重要意义的集合取自集合 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的几类典型的凸子格。

定理 2-3 设 A 是 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 的一个子集, ϕ 是 $(L_1 \times \cdots \times L_n, \leq)$ 映射到 (L, \leq) 上的结构函数, 则 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的一个凸子格。

证明: 由 2.2.2 节中凸子格的定义, 若要证明 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的一个凸子格, 即是证明对任意两个属于 $[\phi]_{\theta_A}$ 中的元素 ϕ_i 和 ϕ_j , 取自两者的交与并之间的集合 $[\phi_i \cap \phi_j, \phi_i \cup \phi_j]$ 的元素仍属于 $[\phi]_{\theta_A}$ 。

对于任意取自 $[\phi]_{\theta_A}$ 中的元素 ϕ_i 和 ϕ_j , 由引理 2-1 可以得到:

$$(\forall \mathbf{x} \in A)(\phi_i(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) = \phi_j(\mathbf{x})) \quad (2-9)$$

从而可以推得:

$$(\forall \mathbf{x} \in A)((\phi_i \cap \phi_j)(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) = (\phi_i \cup \phi_j)(\mathbf{x})) \quad (2-10)$$

假设 ϕ' 是取自 $[\phi_i \cap \phi_j, \phi_i \cup \phi_j]$ 的任一元素, 则有:

$$\phi_i \cap \phi_j \leq \phi' \leq \phi_i \cup \phi_j \quad (2-11)$$

从而，对任意的 $\mathbf{x} \in L_1 \times \cdots \times L_n$,

$$(\phi_i \cap \phi_j)(\mathbf{x}) \leq \phi'(\mathbf{x}) \leq (\phi_i \cup \phi_j)(\mathbf{x}) \quad (2-12)$$

于是有：

$$(\forall \mathbf{x} \in A) (\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})) \quad (2-13)$$

等价地：

$$(\forall \phi' \in [\phi_i \cap \phi_j, \phi_i \cup \phi_j]) (\phi'(\mathbf{x}) \in [\phi]_{\theta_A}) \quad (2-14)$$

进而可以得到下式：

$$(\forall \phi_i, \phi_j \in [\phi]_{\theta_A}) ([\phi_i \cap \phi_j, \phi_i \cup \phi_j] \subseteq [\phi]_{\theta_A}) \quad (2-15)$$

于是定理 2-3 得到证明。

$([\phi]_{\theta_A}, \prec)$ 是基于等价关系 θ_A 的集合 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \preceq)$ 上的凸子格。接下来的两个定理的建立均是在 $[\phi]_{\theta_A}$ 这一等价类的基础之上的。

定理 2-4 设 A 是 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 的一个子集， ϕ 是 $(L_1 \times \cdots \times L_n, \leq)$ 映射到 (L, \leq) 上的结构函数， $M_a A (M_i A)$ 是 $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 内的所有上（下）界组成的集合，称为上（下）界集，则 $(M_a A, \leq) ((M_i A, \leq))$ 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \preceq)$ 的完备子格。

证明： 下面只证 $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上界集 $M_a A$ 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \preceq)$ 的完备子格，关于下界集 $M_i A$ 的证明可以类似得到。

首先证明 $M_a A$ 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \preceq)$ 的子格。

$M_a A$ 是 $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上界集，则任取 $M_a A$ 中两个元素 ϕ_i 和 ϕ_j ，即是说， ϕ_i 和 ϕ_j 均是 $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上界，显然其交和并 $\phi_i \cap \phi_j$ ， $\phi_i \cup \phi_j$ 仍是 $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上界，则 $\phi_i \cap \phi_j$ 和 $\phi_i \cup \phi_j$ 亦是 $M_a A$ 中的元素。由 2.2.2 节中子格的定义可得 $M_a A$ 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \preceq)$ 的子格。

下面只需证明 $M_a A$ 的完备性。

设 $(\phi_i | i \in I)$ 是上界集 $M_a A$ 中的任一个非空族，故有族中的任意元素均是 $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上界，则有：

$$(\forall i \in I) (\forall \mathbf{x} \in A) (\phi_i(\mathbf{x}) \geq \phi(\mathbf{x})) \quad (2-16)$$

进而可以推出：

$$(\forall \mathbf{x} \in A) \left(\inf_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x}) \geq \phi(\mathbf{x}) \right) \quad (2-17)$$

且

$$(\forall \mathbf{x} \in A) \left(\sup_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x}) \geq \phi(\mathbf{x}) \right) \quad (2-18)$$

由于族中元素的上确界 $\inf_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x})$ 与下确界 $\sup_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x})$ 均属于 $M_a A$ ，可以证得

$[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上界集 $M_a A$ 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的完备子格。

定理 2-5 设 A 是 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 的一个子集, ϕ 是 $(L_1 \times \cdots \times L_n, \leq)$ 映射到 (L, \leq) 上的结构函数, $M_a A (M_i A)$ 是 $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上 (下) 界集, 则 $(M_a A, \leq)$ ($(M_i A, \leq)$) 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的凸子格。

证明: 同样地, 只证 $(M_a A, \leq)$ 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的凸子格, $(M_i A, \leq)$ 的证明可以类推。

根据定理 2-4, 已经证得 $(M_a A, \leq)$ 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的子格, 结合凸子格的定义描述, 只需证明:

$$(\forall \phi_i, \phi_j \in M_a A) (\phi_i \cap \phi_j, \phi_i \cup \phi_j] \subseteq M_a A \quad (2-19)$$

首先, $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 是基于等价关系 θ_A 的集合 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 上的凸子格, 对于任一结构函数 $\phi_m \in [\phi]_{\theta_A}$, 有:

$$(\forall \mathbf{x} \in A) (\phi_m(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})) \quad (2-20)$$

其次, 对 $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上界集 $M_a A$, 任取两个结构函数 $\phi_i, \phi_j \in M_a A$, $\mathbf{x} \in L_1 \times \cdots \times L_n$, 有:

$$\phi_i(\mathbf{x}) \geq \phi_m(\mathbf{x}), \phi_j(\mathbf{x}) \geq \phi_m(\mathbf{x}) \quad (2-21)$$

进而, 可以得到

$$(\forall \mathbf{x} \in L_1 \times \cdots \times L_n) (\phi_i \cap \phi_j)(\mathbf{x}) \geq \phi_m(\mathbf{x}), (\phi_i \cup \phi_j)(\mathbf{x}) \geq \phi_m(\mathbf{x}) \quad (2-22)$$

因此, 对于任一结构函数 $\phi' \in [\phi_i \cap \phi_j, \phi_i \cup \phi_j]$, 都可以得到如下的结论:

$$(\forall \mathbf{x} \in L_1 \times \cdots \times L_n) (\phi'(\mathbf{x}) \geq \phi_m(\mathbf{x})) \quad (2-23)$$

由于 ϕ_m 选取的任意性, 结合上式可以推出 ϕ' 是 $[\phi]_{\theta_A}$ 的一个上界, 因此 $\phi' \in M_a A$ 。进一步, 由于 ϕ' 选取的任意性, 式 (2-19) 得证。

于是, $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上(下)界集 $(M_a A, \leq)$ ($(M_i A, \leq)$) 即是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的完备子格亦是其凸子格。这就是说, $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上(下)确界存在且可以唯一确定。如果同时考察 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 上的两个子集 A 和 B , 会发现如下一些有趣的结论。

推论 2-4 设 A 和 B 是 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 上的两个子集且 $A \subseteq B$, ϕ 是 $(L_1 \times \cdots \times L_n, \leq)$ 映射到 (L, \leq) 上的结构函数, 则 $[\phi]_{\theta_B}$ 在 $[\phi]_{\theta_A}$ 中的上(下)界集是 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 的凸子格。

证明: 该推论的证明由定理 3-3 和引理 2-2 立即可得。

定理 2-6 设 A 是 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 的一个子集, ϕ 是 $(L_1 \times \cdots \times L_n, \leq)$ 映射到 (L, \leq) 上的结构函数, $M_a A (M_i A)$ 是 $[\phi]_{\theta_A}$ 在 \mathcal{M} 中的上(下)界集, 则:

- (i) $(M_a A, \leq)$ 的最大元和最小元分别是 (M, \leq) 和 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 的上确界;
- (ii) $(M_i A, \leq)$ 的最大元和最小元分别是 (\mathcal{M}, \leq) 和 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 的下确界。

证明：定理中（i）包含两条内容：

- （1） $(M_a A, \leq)$ 的最大元是 (\mathcal{M}, \leq) 的上确界；
- （2） $(M_a A, \leq)$ 的最小元是 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 的上确界。

设 φ 是 (\mathcal{M}, \leq) 的上确界，由于 $[\phi]_{\theta_A} \subseteq \mathcal{M}$ ，立即可得 φ 是 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 的一个上界，亦即是 $\varphi \in M_a A$ 。又设 $\forall \eta \in M_a A$ ，故 η 是 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 在 (\mathcal{M}, \leq) 中的上界。于是对于 $\forall \mathbf{x} \in L_1 \times \cdots \times L_n$ ，有 $\varphi(\mathbf{x}) \geq \eta(\mathbf{x})$ 。由 η 的定义立即可得， φ 是 $(M_a A, \leq)$ 的最大元。故而（1）得以证明。

定理中的其他内容可以类似得到，不再加以证明。

推论 2-5 设 A 和 B 是 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 上的两个子集且 $A \subseteq B$ ， ϕ 是 $(L_1 \times \cdots \times L_n, \leq)$ 映射到 (L, \leq) 上的结构函数， $M_a B (M_i B)$ 是 $[\phi]_{\theta_B}$ 在 $[\phi]_{\theta_A}$ 中的上（下）界集，则：

- （i） $(M_a B, \leq)$ 的最大元和最小元分别是 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 和 $([\phi]_{\theta_B}, \leq)$ 的上确界；
- （ii） $(M_i B, \leq)$ 的最大元和最小元分别是 $([\phi]_{\theta_B}, \leq)$ 和 $([\phi]_{\theta_A}, \leq)$ 的下确界。

证明：该推论的证明由定理 2-6 和引理 2-2 立即可得。

前面介绍了一些凸子格概念在可靠性理论中发展出来的定理和推论，接下来将介绍这些定理和推论在实际工程中的意义。

2.3.3 阐释和讨论

在实际工程中面对复杂的机械系统，往往会首先将系统划分为多个子系统（部件）进行分析，在将子系统（部件）的性质整合为系统性质的过程中，表征子系统（部件）状态与系统状态之间函数关系的结构函数便彰显出重要的现实意义。不同的结构函数代表不同的系统结构，而结构函数的确定除了通过系统的结构来开展，同时也可以通过现有的特定子系统（部件）状态与系统状态之间关系的信息进行。从理论上讲，考虑 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 的一个子集 A ，集合 $A_\phi = \{(\mathbf{x}, y) | \mathbf{x} \in A\}$ 称为 ϕ 的观察集（Observation Set），其中 $\phi(\mathbf{x}) = y$ ；集合 $A_\phi = \{(\mathbf{x}, y) | \mathbf{x} \in A\}$ 中的元素，即序对 (\mathbf{x}, y) 称为一个观察量（An Observation）^[76]。事实上，无法通过以一考察观察集中的序对来确立结构函数。与此同时，纵然已有观察集中每一序对的信息，即是已知任一子系统（部件）状态所对应的系统状态，此时研究结构函数的意义也不再存在。假设系统的状态空间可以由 $L_1 \times \cdots \times L_n$ 的一些元素进行描述和推测，将这些元素的集合记为 A ，即是说可以确定观察集 A_ϕ 。进一步，给定了这一观察集 A_ϕ ，便可得到由式（2-7）描述的结构函数等价类 $[\phi]_{\theta_A}$ 的界集。根据这一给定的观察集，工程师们便可以寻找优于等价类 $[\phi]_{\theta_A}$ 中任一元素的结构函数。实际上，

对任一 $\mathbf{x} \in A$, \mathbf{x} 表示 n 个子系统 (部件) 的状态向量, 而不同的系统结构对应的结构函数也不同, 从而同一子系统 (部件) 的状态向量也会对应不同的系统状态。对于同一 n 个子系统 (部件) 的状态向量 \mathbf{x} , 以并联和串联结构为例, 可以直观地发现同一状态向量可能会对应不同的系统状态。当其中 n 个子系统 (部件) 的状态都相同, 则采取并联和串联结构都会得到相同的系统状态; 除此之外的情况下, 并联结构的系统状态均优于串联结构的系统状态。无疑, 面对同样的 n 个子系统 (部件), 工程师们致力于寻求优异的系统结构得到更好的系统状态。这也是研究 $[\phi]_{\theta_A}$ 的上界集的必要性。

根据定理 2-4 中“ $(M_a A, \leq)$ ($(M_i A, \leq)$) 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的完备子格”的结论, 结合完备格的性质, 可以得到 $[\phi]_{\theta_A}$ 上界集的上下确界均存在。又根据定理 2-5 中“ $(M_a A, \leq)$ ($(M_i A, \leq)$) 是 $(\mathcal{M}(L_1 \times \cdots \times L_n, L), \leq)$ 的凸子格”的结论和凸子格的定义, 可以推得介于 $[\phi]_{\theta_A}$ 上界集的上下确界之间的元素均是 $[\phi]_{\theta_A}$ 的上界。此外, $M_a A$ 的最大元和最小元可以由定理 2-6 的结论进行替换和表达, 从而得到在可靠性工程中有意义的边界。给定子系统 (部件) 状态数据, 好的结构函数则对应着更优的系统状态。在确定了观察集 A_ϕ 的基础上, 工程师们便可以比较新提出的结构函数与 $[\phi]_{\theta_A}$ 中结构函数的优劣。这个过程是由新提出结构函数分别与 $[\phi]_{\theta_A}$ 上界集的最小元和 $[\phi]_{\theta_A}$ 下界集的最大元进行比较来实现的。

考察从 $([0,1]^2, \leq)$ 映射到 $([0,1], \leq)$ 上的结构函数 ϕ ,

$$\phi: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]: (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1 + x_2}{2},$$

设观察集 A 为 $\left\{ (0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1,1) \right\}$, 可以推得 $[\phi]_{\theta_A}$ 下界集的最大元和 $[\phi]_{\theta_A}$ 上界集的最小元分别是:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$$

和

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$$

此时给出结构函数 $\varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, 易得结构函数 φ_1 和 φ_2 均优于结构函数 φ , 从而得到新提出的结构函数与 $[\phi]_{\theta_A}$ 中结构函数之间的比较结果。

2.4 算例分析

本节中, 将运用文献[72]中的数值算例对 2.3.2 节中的结论进行例证。

假设 ϕ 是从 $([0,1]^2, \leq)$ 映射到 $([0,1], \leq)$ 上的结构函数,

$$\phi: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]: (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1 + x_2}{2},$$

易得一些给定点处函数的值，如

$$\phi\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}, \phi\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}, \phi\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

为了简便，将集合 $\left\{(0,0), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (1,1)\right\}$ 记为 A ，集合 $\left\{(0,0), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (1,1)\right\}$ 记为 B 。于是 ϕ 基于等价关系 θ_A 的等价类 $[\phi]_{\theta_A}$ 即可由闭区间 $[l(A, \phi), u(A, \phi)]$ 表达^[75]，其中

$$l(A, \phi)(\mathbf{x}) = \sup_{y \in [0, \mathbf{x}] \cap A} \phi(y), \quad u(A, \phi)(\mathbf{x}) = \inf_{y \in [\mathbf{x}, 1] \cap A} \phi(y) \quad (2-24)$$

同样地， ϕ 基于等价关系 θ_B 的等价类 $[\phi]_{\theta_B}$ 即可由闭区间 $[l(B, \phi), u(B, \phi)]$ 表达，其中

$$l(B, \phi)(\mathbf{x}) = \sup_{y \in [0, \mathbf{x}] \cap B} \phi(y), \quad u(B, \phi)(\mathbf{x}) = \inf_{y \in [\mathbf{x}, 1] \cap B} \phi(y) \quad (2-25)$$

通过计算，可以得到：

$$l(A, \phi): [0,1]^2 \rightarrow [0,1]: (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 1 & ; \quad x_1 = x_2 = 1 \\ \frac{1}{2} & ; \quad (x_1, x_2) \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \times \left[\frac{3}{4}, 1\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right] \setminus \{(1,1)\} \\ 0 & ; \quad \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2-26)$$

$$u(A, \phi): [0,1]^2 \rightarrow [0,1]: (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0 & ; \quad x_1 = x_2 = 0 \\ \frac{1}{2} & ; \quad (x_1, x_2) \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left[0, \frac{3}{4}\right] \cup \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{2}{3}\right] \setminus \{(0,0)\} \\ 1 & ; \quad \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2-27)$$

$$l(B, \phi): [0,1]^2 \rightarrow [0,1]: (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 1 & ; \quad x_1 = x_2 = 1 \\ \frac{1}{2} & ; \quad (x_1, x_2) \in \left[\frac{1}{5}, 1\right] \times \left[\frac{4}{5}, 1\right] \cup \left[\frac{1}{4}, 1\right] \times \left[\frac{3}{4}, 1\right] \\ & \quad \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right] \setminus \{(1,1)\} \\ 0 & ; \quad \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2-28)$$

- (1) $(M_a B, \leq)$ 的最大元即是 $([\phi]_{\theta_a}, \leq)$ 的上确界;
- (2) $(M_a B, \leq)$ 的最小元即是 $([\phi]_{\theta_b}, \leq)$ 的上确界;
- (3) $(M_i B, \leq)$ 的最大元即是 $([\phi]_{\theta_b}, \leq)$ 的下确界;
- (4) $(M_i B, \leq)$ 的最小元即是 $([\phi]_{\theta_a}, \leq)$ 的下确界。

结果表明, 界集的最值可以通过结构函数等价类的上下界进行替代和转换, 这个结果与在先前章节中得到的理论结果是一致的。这易于我们利用结构函数集边界寻求有用的结构函数。

2.5 本章小结

格是一类重要的偏序集, 完备格是一类重要的格。本章基于格同余关系, 在结构函数完备格的集合上引入凸子格的概念, 联系可靠性理论进行系统可靠性分析。通过格同余关系上的结构函数等价类与结构函数完备格集之间的关系, 加深对结构函数反应出的系统状态与部件状态之间关系的理解。理论分析与算例分析同时表明, 给定条件的结构函数界集的最值可以与结构函数上对应等价类的凸子格界集的上下确界进行替换, 为工程师们分析结构函数的优劣提供了理论依据。论文第五章将进一步结合可能性理论, 讨论分析多状态系统在完备格框架下的可靠性。

第三章 基于可能性理论的多状态系统的可靠性分析

3.1 引言

由于信息的不完全和不精确，实际工程系统存在着大量的不确定性。有关专家学者按照对不确定性进行量化的数学方法将这些不确定性分为随机不确定性和认知不确定性两大类：随机不确定性是环境和系统自身所固有的；认知不确定性是由于信息的缺乏和认识的不完全所造成的。目前处理随机不确定性的常用方法是基于统计信息和概率论的。对于可靠性分析中的认知不确定性，有关专家学者利用证据理论、区间分析、凸集模型和可能性理论等各种理论方法^[70,123-127]进行表征和分析。可能性理论建立在两个对偶的模糊测度（可能性测度和必要性测度）之上。它与概率论很相似，两者都是基于集函数来表征不确定性的工具；不同点在于，概率论具有可加性，而可能性理论只有次加性^[128,129]。基于可能性理论的可靠性分析^[114,115,130-132]是可靠性理论中处理认知不确定性的一个重要分支。事实上，可能可靠性理论发展至今已形成了两个分支：一是由蔡开元博士提出的能双可靠性理论^[69] (Posbist Reliability Theory)；另一个分支是由 Cappelle 和 Kerre 博士建立的将多态结构函数与可能性理论相结合的方法^[70,82]。与蔡开元博士提出的能双可靠性理论^[69]相比，人们更少关注到 Cappelle 和 Kerre 博士提出的将多态结构函数理论和可能性理论相结合的可能可靠性理论。究其根源，是由于实际工程应用中系统状态多是离散的，很难得到系统可能可靠性函数的显式表达。Cappelle 和 Kerre 博士的方法在理论上是通过有效地利用系统结构函数和状态水平来建立系统可能可靠性函数的。然而，在实际应用时，由于系统状态可能性计算的不便，人们往往不知如何去建立系统可能可靠性函数。本文利用 Cappelle 和 Kerre 博士提出的可能可靠性理论来研究系统可靠性分析的方法。

可能可靠性函数定义为以 ϕ 为结构函数时，系统表征的状态优于给定的状态水平 α 的可能性。为了求出系统可能可靠性函数，首先要计算系统表征某个给定状态的可能性。由于参杂主观因素，很难获得系统状态可能性的分布，因此严重限制了系统状态的可能性分析。因为很难得到系统状态可能性的分布，所以如何计算某一给定状态水平下系统可能可靠性函数的值也困扰着人们。综上所述，关键是如何把理论和实际更加有效地结合在一起？本章的核心内容就是找到计算系

统可能可靠性函数的方法，并且从状态水平的观点出发，克服系统可能性分析的束缚。

与系统状态可能性分布相比，人们可以通过更多的方法来得到系统寿命可能性分布^[83]。故而，如果系统状态和系统寿命的关系已知，就可以算出系统的可能可靠性。基于此，在可能可靠性函数中加入另外一个变量——观测时刻 t_{im} 。这看似是更难得到系统的可能可靠性，但事实上增加了该变量后，可以有效地将系统状态和系统寿命可能性分布连接起来，便可以绕过计算给定的系统状态可能性来计算较为容易得到的系统寿命可能性分布。所以，通过系统状态和其相应的最大可能剩余寿命的函数关系，就可以巧妙地解决前面提及的可能可靠性理论的限制。

本章重新定义多状态系统的可能可靠性函数，并利用系统寿命的可能性分布对之进行分析。为了表征系统状态与剩余寿命之间的内在关系，定义状态对应的最大可能剩余寿命（State Corresponding Most Possible Residual Lifetime，简称MPRL）为该状态下系统保有最大可能的剩余寿命时间。当给定以某一时刻系统保有某一状态为系统可靠度水平，系统可能可靠性便可以通过系统状态和对应的最大可能剩余寿命而得到。在此基础上，进而分析状态水平 α 与观测时刻 t_{im} 的变化对系统可能可靠性分布的影响。同时基于可能性理论从系统状态结构函数的思想出发对典型系统的可能可靠性进行分析和计算。

3.2 可能性理论的基础知识

可能性理论是由 Zadeh 在 1978 年提出来的^[81]，它属于模糊理论的一个分支。可能性是人们对于事物的可实现程度以及达到某种目标的难易程度的一种反映，其大小与人的感觉相关^[133]。可能性同事件的概率既有联系又有本质区别。本节从模糊限制和可能性测度的定义出发，详尽地介绍与可能性理论相关的定义和性质。

3.2.1 可能性分布

为了便于对可能性分布的理解，首先介绍 Zadeh 从模糊约束展开的对可能性分布的引入和定义^[81]。

设 X 是取值于论域 U 的一个变量，记 u 为论域 U 中通用的元素， $X = u$ 表示变量 X 取值为 u ， $u \in U$ 。 F 是隶属函数为 μ_F 的 U 上的一个模糊子集， $\mu_F(u)$ 表征 u 符合 F 的程度， $\mu_F(u)$ 的值越接近 1 表示 u 符合 F 的程度越高； $\mu_F(u)$ 的值越接近 0 表示 u 符合 F 的程度越低。 F 作为 U 上的一个模糊子集对论域 U 中的一些元素具

有弹性约束,若这些元素可能赋值给变量 X ,也就是说如果 F 对可能赋值予变量 X 的值有弹性约束的作用,则称 F 是变量 X 上的模糊约束(F is a fuzzy restriction on X),或称为关于变量 X 的模糊约束(associate with X),记号如下:

$$X = u: \mu_F(u) \quad (3-1)$$

式中的 $\mu_F(u)$ 意为当变量 X 被赋值为 u 时, X 符合模糊约束 F 的程度。同时, $1 - \mu_F(u)$ 的意义则是为使将 u 赋值予 X , 模糊约束 F 还须进一步延伸的程度。事实上, 模糊子集 F 本质上并非是模糊约束, 仅当其作为变量取值的约束时, 才成为模糊约束^[134]。

设 $R(X)$ 是变量 X 上的一个模糊约束, Zadeh 给出了如下的关系赋值方程 (Relational Assignment Equation) 来表明模糊子集 F 扮演出的对变量 X 的模糊约束作用的角色:

$$R(X) = F \quad (3-2)$$

这个方程同时给出关于变量 X 的模糊限制对模糊集 (或模糊关系) 的指派。接下来进一步阐释模糊约束的概念。

对于如下式 (3-3) 中的命题:

$$p = X \text{ 是 } F \quad (3-3)$$

式中的变量 X 可以指代物体名称,也可以指代变量或是命题等; F 指代论域 U 上的模糊子集, 比如“Jessie 是年轻人”、“ X 是个很小的数”、“Harriet 拥有一头金发是正确的”等等。记 $A(X)$ 表征的在 U 中取值的变量 X 的本质属性, 式 (3-2) 即可转化为:

$$R(A(X)) = F \quad (3-4)$$

式 (3-4) 表明, 命题“ $p = X \text{ 是 } F$ ”即是模糊子集 F 指派为 $A(X)$ 的模糊约束。接下来介绍的具体例子将有助对模糊约束的理解。

设命题“ $p = \overset{\Delta}{\text{John}}$ 是年轻人”, 其中“年轻”是取值于论域 $U = [0,100]$ 上的模糊子集, 其隶属函数为:

$$\mu_{\text{年轻}}(u) = 1 - S(u; 20, 30, 40) = \begin{cases} 1, & u \leq 20 \\ 1 - 2\left(\frac{u-20}{20}\right)^2, & 20 < u \leq 30 \\ 2\left(\frac{u-40}{20}\right)^2, & 30 < u \leq 40 \\ 0, & u > 40 \end{cases} \quad (3-5)$$

其中, S -函数是由文献[135]给出:

$$S(u; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0, & \text{for } u \leq \alpha \\ 2\left(\frac{u-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \text{for } \alpha < u \leq \beta \\ 1-2\left(\frac{u-\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \text{for } \beta < u \leq \gamma \\ 1, & \text{for } u > \gamma \end{cases} \quad (3-6)$$

式(3-6)中参数 $\beta \overset{\Delta}{=} (\alpha + \gamma)/2$ 表示 S -函数的渡越点 (Crossover Point), 即 $S(\beta; \alpha, \beta, \gamma) = 0.5$ 。于是, 此处 X 的本质属性 $A(X)$ 指 John 的年龄; 同时命题 “ $p \overset{\Delta}{=} X$ 是 F ” 可以依照式(3-4)转换如下:

$$\text{John是年轻人} \rightarrow R(\text{John的年龄}) = \text{年轻} \quad (3-7)$$

针对这一例子, 来考察一个具体的年龄, $u = 28$, 由式(3-5)可以算得 28 岁对模糊子集“年轻”的隶属度为 0.7。也就是说, 28 岁这一元素与“年轻”这一模糊子集的相容程度 (Degree of Compatibility) 为 0.7。“John是年轻人”这一命题将隶属度为 0.7 的意义从“28 岁与‘年轻’的相容性”转换为给定 “ $p \overset{\Delta}{=} \text{John是年轻人}$ ” 的限制条件下, “John 28 岁”的可能度 (Degree of Possibility)。

有了以上对模糊约束的详细介绍, 接下来便可以给出可能性分布的定义^[80]。

为了表达的简便, 设 $A(X) = X$, 由 X 表征它自身的本质属性, 这并不会引起概念上的混淆。

定义 3-1 设 X 是取值于论域 U 的一个变量, F 是隶属函数为 μ_F 的论域 U 上的一个模糊子集, 令 F 是 X 取值的模糊限制 $R(X)$, 则命题“ X 是 F ”可以转化为:

$$R(X) = F \quad (3-8)$$

假定与这一命题相关的可能性分布等于 $R(X)$, 以 π_X 表示关于 X 的可能性分布函数, 定义 π_X 与模糊子集 F 的隶属函数在数值上是相等的:

$$\pi_X \overset{\Delta}{=} \mu_F \quad (3-9)$$

于是, “ $X = u$ ”的可能度 (Possibility) $\pi_X(u)$ 即被认定为等于 $\mu_F(u)$ 。本质上, X 的可能性分布是一个模糊子集, 它给出了在 U 中 X 取任何定值的可能性; 可能性分布的概念与模糊集合的表现形式是一致的。

由前面的例子易得, “ $p \overset{\Delta}{=} X$ 是 F ”这一命题将变量 X 和可能性分布相连, 同时这个可能性分布与 F 相同: 对于同一元素 u , 可能性分布函数在 u 处的值 $\pi_X(u)$ 与 u 关于模糊子集 F 的隶属度 $\mu_F(u)$ 相等。

下面给出一个简单的例子来加深对可能性分布直观的理解。

设 U 为所有正整数构成的论域, F 是 U 上的“小整数”模糊子集, 其隶属函数定义如下:

$$\text{小整数} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.4}{5} + \frac{0.2}{6}$$

于是命题“ X 是小整数”即是将变量 X 与如下的可能性分布相连:

$$\pi_X = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.4}{5} + \frac{0.2}{6} \quad (3-10)$$

其中的项, 以 $\frac{0.8}{3}$ 为例说明, “3”符合模糊概念“小整数”的程度为 0.8, 同时表示在“ X 是小整数”的模糊约束下, X 取值为3的可能度是 0.8。

3.2.2 可能性测度和必要性测度

定义 3-2 设 A 是论域 U 上的集合, X 是取值于 U 的变量, π_X 是关于变量 X 的可能性分布函数, $\pi_X = \mu_A$, 则命题“ X 是 A ”的可能性测度 $\Pi(A)$ 定义为如下式所示的 $[0,1]$ 区间内的一个数:

$$\Pi(A) = \begin{cases} \text{Sup}_{u \in A} \pi_X(u), & \text{若 } A \text{ 为分明集} \\ \text{Sup}_{u \in U} \{ \mu_A(u) \wedge \pi_X(u) \}, & \text{若 } A \text{ 为模糊集} \end{cases} \quad (3-11)$$

其中, \wedge 表示取小算子。若 A 为分明集, $\Pi(A)$ 的值意为 X 的取值属于集合 A 的可能性。若 A 为模糊集, $\mu_A(u)$ 为 A 的隶属函数, $\Pi(A)$ 的值意为命题“ X 是 A ”的可能度。

性质 3-1 设 A 和 B 是论域 U 上任意两个模糊子集, 由模糊集的可能性测度定义可得:

$$\Pi(A \cup B) = \Pi(A) \vee \Pi(B) \quad (3-12)$$

相应地, 概率论中对于论域 U 上任意两个子集 A 和 B , $A \cup B$ 若存在, 则有与式 (3-12) 相并列的性质 (可加性):

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad (3-13)$$

当且仅当集合 A 和 B 互不相交 ($A \cap B = \phi$) 时上式中的等号成立, 即 $\mu_A(u) \mu_B(u) \equiv 0$ 。

性质 3-2 设 A 和 B 是论域 U 上任意两个模糊子集, 类似可以得到关于两集合交集的可能性测度的性质:

$$\Pi(A \cap B) \leq \Pi(A) \wedge \Pi(B) \quad (3-14)$$

当且仅当 A 和 B 互不相关 (Noninteractive) 时上式中的等号成立。

同样, 在概率论中有:

$$P(A \cap B) \leq P(A)P(B) \quad (3-15)$$

当且仅当集合 A 和 B 为分明集且互相独立时上式中的等号成立。

下面给出概率测度与可能性测度的公理化定义^[136]。

定义 3-3 设概率空间为三元体 (U, F, P) , A 和 B 是论域 U 上任意两个互不相交的子集, 若 P 在 F 上满足如下三个性质:

- (1) 正规: $P(U) = 1$;
- (2) 非负: $P(A) \geq 0, \forall A \in F$;
- (3) 有限可加: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

则称 P 为 F 上的概率测度。

定义 3-4 设可能度空间为三元体 (U, F, Π) , A 和 B 是论域 U 上任意两个互不相关的子集, 若 Π 在 F 上满足如下三个性质:

- (1) 正规: $\Pi(U) = 1, \Pi(\phi) = 0$;
- (2) 非负: $\Pi(A) \geq 0, \forall A \in F$;
- (3) 模糊可加: $\Pi(A \cup B) = \Pi(A) \vee \Pi(B)$,

则称 Π 为 F 上的可能性测度。

概率论中以概率测度来描述不确定性, 可能性理论中以可能性测度和必要性测度这一对测度来描述不确定性。必要性测度 $N(A)$ 定义如下:

$$N(A) = 1 - \Pi(\sim A) \quad (3-16)$$

其中, $\Pi(\sim A)$ 表示命题“ X 不是 A ”的可能性测度。接下来分别给出与定义 3-2 和定义 3-4 相对应的必要性测度的定义^[137]。

定义 3-5 设 A 是论域 U 上的集合, X 是取值于 U 的变量, π_X 是关于变量 X 的可能性分布函数, $\pi_X = \mu_A$, 则命题“ X 是 A ”的必要性测度 $N(A)$ 定义如下:

$$N(A) = \begin{cases} \text{Inf}_{u \in A} \{1 - \pi_X(u)\}, & \text{若 } A \text{ 为分明集} \\ \text{Inf}_{u \in U} \{\mu_A(u) \vee (1 - \pi_X(u))\}, & \text{若 } A \text{ 为模糊集} \end{cases} \quad (3-17)$$

其中, \vee 表示取大算子。

定义 3-6 设可能度空间为三元体 (U, F, Π) , A 和 B 是论域 U 上任意两个互不相关的子集, 若 N 在 F 上满足如下三个性质:

- (1) 正规: $N(U) = 1, N(\phi) = 0$;
- (2) 非负: $N(A) \geq 0, \forall A \in F$;
- (3) 模糊可加: $N(A \cap B) = N(A) \wedge \Pi(B)$,

则称 Π 为 F 上的必要性测度。

显然, 可能性测度和必要性测度是对偶的。

性质 3 $\max(\Pi(A), \Pi(\sim A)) = 1, \min(N(A), N(\sim A)) = 0$ 。

性质 4 $\Pi(A) \geq N(A)$

性质 5 $\Pi(A) + \Pi(\sim A) \geq 1, N(A) + N(\sim A) \leq 1$

性质 6 若 $N(A) > 0$, 则 $\Pi(A) = 1$; 若 $\Pi(A) < 1$, 则 $N(A) = 0$ 。

在概率论中, 事件的概率 A 能完全决定事件 $\sim A$ 的概率。而在可能性理论中, A 和 $\sim A$ 之间的关系很弱, 一个事件的不确定性是由可能度和必要度两个要素来确定的。

3.2.3 可能可靠性函数和对偶可能可靠性函数

可靠性理论中的可能可靠性函数和对偶可能可靠性函数的定义是建立在系统的结构函数之上的, 这一节首先介绍建立在单位区间 $[0,1]^n$ 和 $[0,1]$ 上的系统结构函数的定义, 以及结构函数集上的序关系, 进而介绍 α 截集与可能可靠性函数。

定义 3-7^[72] 假设 n 是 ≥ 1 的任意自然数, $[0,1]^n$ - $[0,1]$ 上的函数 ϕ 满足下列两个条件:

$$(1) \phi(0, \dots, 0) = 0 \text{ 和 } \phi(1, \dots, 1) = 1;$$

$$(2) (\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (L_1 \times \dots \times L_n)^2) (\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{y})).$$

则称 ϕ 为 n 维的结构函数。

与定义 2-8 中定义在完备格上的结构函数不同的是, 定义 3-7 给出的结构函数 ϕ 是 $[0,1]^n$ - $[0,1]$ 上的映射, 定义域 $[0,1]^n$ 表征 n 个子系统的状态, 值域 $[0,1]$ 表征系统状态。显然定义 2-8 对结构函数的定义更为广泛, 而定义 3-7 定义的结构函数仅为其中一个分支。两个定义的不同仅在于定义域和值域的取值范围, 相同的是对映射的约束条件: 两个定义的条件 (1) 同时表明, 若 n 个子系统均处于失效状态, 则系统也失效; 若 n 个子系统均处于完好工作状态, 则系统也完好; 定义中的条件 (2) 同时表明, 结构函数 ϕ 具有保序性。

依照式 (2-4), 此时结构函数之间的序关系 \leq 定义如下: 假设 ϕ_1 和 ϕ_2 是 $[0,1]^n$ - $[0,1]$ 上的两个结构函数, 则:

$$\phi_1 \leq \phi_2 \Leftrightarrow (\forall \mathbf{x} \in [0,1]^n) (\phi_1(\mathbf{x}) \leq \phi_2(\mathbf{x}))$$

下面介绍四个用于研究系统可靠性的函数: α 截集、对偶 α 截集、可能可靠性函数和对偶可能可靠性函数。

结构函数 ϕ 的 α 截集 $S(\alpha, \phi)$ 和对偶 α 截集 $S^d(\alpha, \phi)$ 分别定义为:

$$S(\alpha, \phi) = \{ \mathbf{x} | \mathbf{x} \in [0,1]^n \text{ and } \phi(\mathbf{x}) \geq \alpha \}$$

和

$$S^d(\alpha, \phi) = \{x \mid x \in [0,1]^n \text{ and } \phi(x) \leq \alpha\}$$

其中， α 是区间 $[0,1]$ 中的任意元素。

定义 3-8^[72] 假设 ϕ 是一 n 维的结构函数，基于 ϕ 的可能可靠性函数 $\rho(\Pi, \phi)$ 定义为 $[0,1]$ - $[0,1]$ 上的函数：

$$\rho(\Pi, \phi) : [0,1] \rightarrow [0,1] : \alpha \mapsto \Pi(S(\alpha, \phi));$$

基于 ϕ 的对偶可能可靠性函数 $\rho^d(\Pi, \phi)$ 定义为 $[0,1]$ - $[0,1]$ 上的函数：

$$\rho^d(\Pi, \phi) : [0,1] \rightarrow [0,1] : \alpha \mapsto \Pi(S^d(\alpha, \phi))$$

可能可靠性函数的意义在于， $\rho(\Pi, \phi)(\alpha)$ 的值即是以 ϕ 为结构函数时，系统状态不劣于水平状态 α 的可能性；同时， $\rho^d(\Pi, \phi)(\alpha)$ 的值即是以 ϕ 为结构函数时，系统状态不优于水平状态 α 的可能性。从而，多状态系统的可能可靠性分析便可由此开展。

3.3 多状态系统可能可靠性分析

本节中对系统的可能可靠性分析是基于 Cappelle 和 Kerre 的工作^[70,82]进行的。在原有的可能可靠性函数定义中引入观测时刻这一变量，产生新的可能可靠性函数的定义。随后结合系统状态与对应的最大可能剩余寿命之间的函数关系，利用系统寿命的可能性分析使得观测时刻作为一个桥梁，完成对可能可靠性函数的分析和计算。

3.3.1 模型假设

(1) 在初始时刻 $t=0$ 时系统处于完好状态。系统的可能状态是有序的，其状态空间由单位区间 $[0,1]$ 所描述。状态 1 表示系统完好，状态 0 表示系统完全失效。状态值从 1 下降到 0 即是系统从完好状态 1 退化到完全失效的状态 0。

(2) 系统工作时间，定义为系统寿命，是系统状态从完好状态 1 劣化到完全失效 0 的时间间隔。系统寿命要求越长，可能性则越低，即是说，系统寿命的可能性分布随着寿命要求的增加呈下降趋势。图 3-1 是系统寿命的可能性分布一例，从 t_1 开始系统寿命的可能性不再为 1。可以得到，有这么一个时间点（图中的 t_1 点），表征着系统寿命在区间 $[0, t_1]$ 内保有完全的可能性（也是最大可能性 1）。

图 3-1 中，时刻点 t_1 对应着保有完全可能性的最长系统寿命值。 t_1 定义为最大可能的系统寿命值（the Most Possible Value of System Lifetime）。随着系统的劣化，系统剩余寿命的可能性分布也在发生变化。每一系统状态都对应于一个不同的剩

余寿命的可能性分布，指定状态下的系统剩余寿命的可能性分布亦服从下降的趋势。同时，每一状态都对应着一个保有完全可能性的最长系统剩余寿命(the Longest Residual System Lifetime under the Full Possibility)，比如，状态 1（完好状态）所对应的保有完全可能性的最长系统剩余寿命即是 t_1 （如图 3-1 所示）。事实上，由于状态 1 表征着系统的完好状态，其对应的剩余寿命即是系统寿命。任一状态 α 对应的最大可能剩余寿命（Corresponding Most Possible Residual Lifetime，简记为 MPRL）便定义为状态 α 对应的保有完全可能性的最长系统剩余寿命，用 $t_{mp}(\alpha)$ 表示。图 3-1 中的 t_1 可表示为 $t_{mp}(1)$ 。

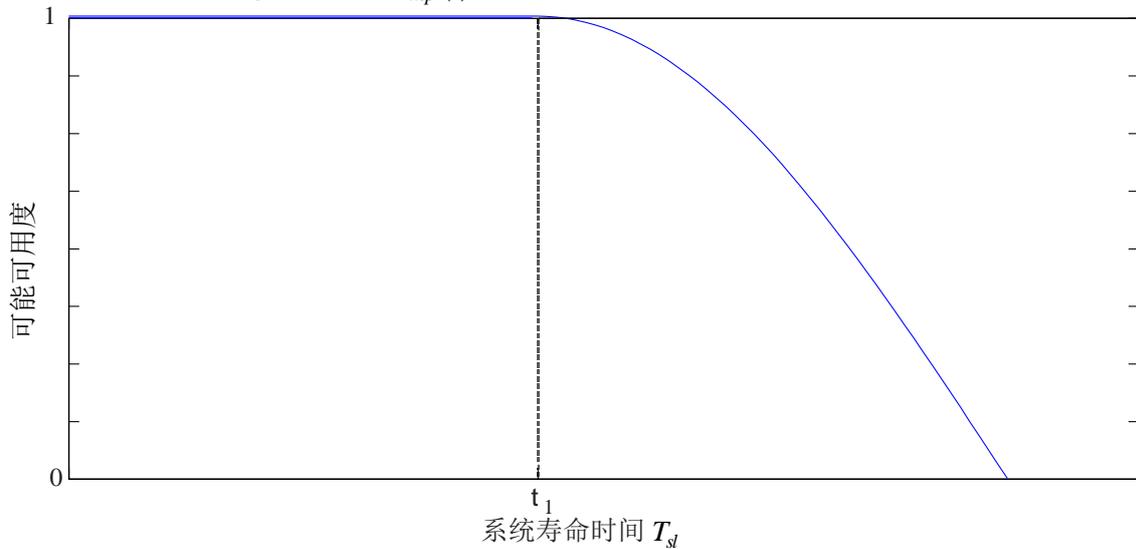


图 3-1 系统寿命的可能性分布-例

(3) 给定状态下的最大可能剩余寿命（MPRL）与观测时刻无关。这就是说，给定状态下的最大可能剩余寿命只与系统所处状态有关，而与系统经历了多长时间到达这一状态无关。一旦给定了系统状态，那么对应的最大可能剩余寿命也就唯一地被确定下来。同时可以验证的是，系统寿命的可能性分布即是状态 1 对应的最大可能剩余寿命的可能性分布。

3.3.2 可能可靠性函数的再定义

定义 3-8 ($\rho(\Pi, \phi): [0,1] \rightarrow [0,1]: \alpha \mapsto \Pi(S(\alpha, \phi))$) 中，系统可能可靠性定义为以 ϕ 为结构函数时，系统状态不劣于水平状态 α 的可能性。其中，给定的状态 α 被指定为检验系统是否可靠的标准——如果系统表征出不劣于 α 的状态则被认为是可靠的；当系统无法达到给定的状态水平 α 时则被认为是不可靠的。在此基础上，系统可能可靠性即是系统被认为是可靠的可能性。然而，在实际工程中，系

统的状态集通常都是有限且离散的，很难得到系统状态的可能性分布，这便成为应用可能可靠性理论的瓶颈。如果建立起系统状态与系统剩余寿命之间的函数关系，再利用系统寿命的可能性分布，这一瓶颈即可弥补。

基于此，观测时刻 t_{im} 这一变量也被引入到可能可靠性函数的定义中，系统是否可靠的标准成为系统在观测时刻 t_{im} 表征出不劣于水平状态 α ，系统可能可靠性则定义为系统在观测时刻 t_{im} 表征出不劣于水平状态 α 的可能性：

$$\rho_{\Pi}^{\phi}(\alpha, t_{im}) = \Pi\{\phi(x) \geq \alpha, \text{ at investigated moment } t_{im}\} \quad (3-18)$$

通过这一变量的引入，再建立系统状态与对应剩余寿命之间的函数关系，系统可能可靠性的计算分析便能得以实现。

3.3.3 系统状态与对应剩余寿命之间的关系

根据 3.3.1 节中的模型假设(2)，完好状态 1 对应的最大可能剩余寿命是 $t_{mp}(1)$ ，同时完全失效状态 0 的剩余寿命是 0。图 3-2 是系统状态与对应的最大可能剩余寿命的关系的一例，随着系统状态从完好状态 1 向完全失效状态 0 劣化，状态所对应的剩余寿命也逐步的减小。一般来说，这样的函数关系是由经验数据和相关的寿命预测模型所确定的。

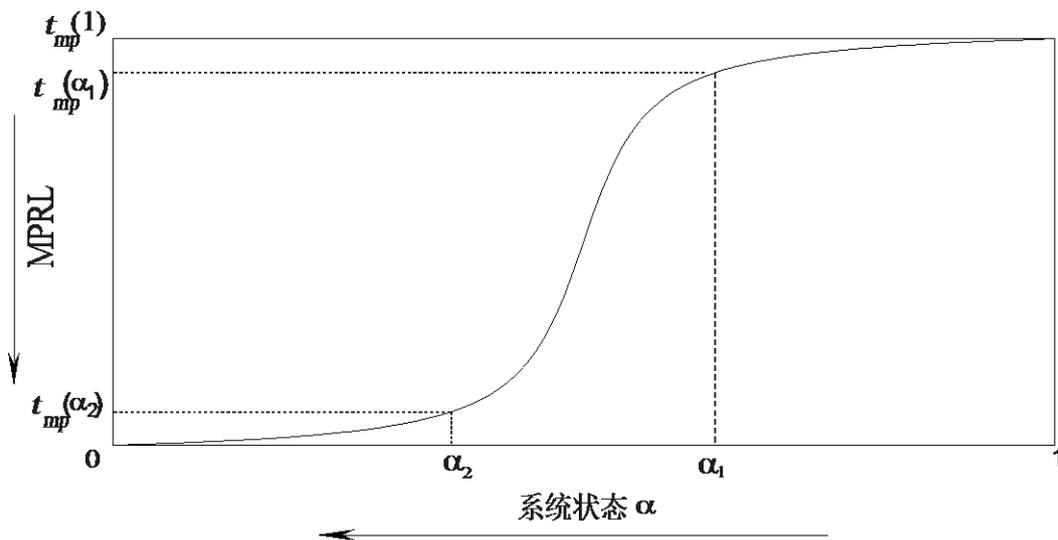


图 3-2 系统状态与对应的最大可能剩余寿命的关系

3.3.4 系统可能可靠性的计算分析

假定 $T_{mp}(t_{im})$ 和 T_{sl} 分别表示给定观测时刻 t_{im} 的最大可能剩余寿命和系统寿

命，系统可能可靠性的计算可以由下面的等式推出：

$$\begin{aligned}
 \rho_{\Pi}^{\phi}(\alpha, t_{im}) &= \Pi\{\phi(x) \succeq \alpha, \text{ 观测时刻 } t_{im} \text{ 时}\} \\
 &= \Pi\{T_{mp}(t_{im}) \geq t_{mp}(\alpha)\} \\
 &= \Pi\{T_{sl} \geq t_{im} + t_{mp}(\alpha)\} \\
 &= \Pi\{T_{sl} = t_{im} + t_{mp}(\alpha)\}
 \end{aligned} \tag{3-19}$$

其中，第二个等式是根据系统状态与对应 MPRL 之间的函数关系得到的；最后一个等式则是依据可能性测度的性质 $\Pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \Pi(A_i)$ 和系统寿命可能性递减的性质得到的。

从而，基于系统状态 α 和对应的最大可能剩余寿命 $t_{mp}(\alpha)$ 之间的函数关系，在给定观测时刻 t_{im} 和系统的状态水平 α 时，系统可能可靠性的计算便可由式 (3-19) 实现。

综上所述，给定系统的观测时刻 t_{im} 和水平状态 α ，按照下述三个步骤，便可计算分析系统可能可靠性。

第一步：利用系统状态与其 MPRL 之间的函数关系（如图 3-2 所例），得到给定状态 α 下的最大可能剩余寿命 $t_{mp}(\alpha)$ 。

第二步：观测时刻 t_{im} 与 $t_{mp}(\alpha)$ 之和 $t_{mp}(\alpha) + t_{im}$ ，表征为给定条件下期望的系统寿命。

第三步：利用系统寿命的可能性分布（如图 3-1 所例），得到期望的系统寿命 $t_{mp}(\alpha) + t_{im}$ 所对应的可能性即为系统可能可靠性。

因此，系统可能可靠性函数的计算迎刃而解。下一节主要讨论系统状态 α 和观测时刻 t_{im} 对系统可能可靠性分布的影响。

3.4 系统状态 α 和观测时刻 t_{im} 对系统可能可靠性分布的影响

在系统可能可靠性函数的定义中，有两个变量：系统状态和观测时刻。如果两个变量的函数值确定，那么系统的可能可靠性函数值也能够唯一的确定。而当其中一个变量的函数值确定时，系统可能可靠性函数则成为另一变量的函数。

3.4.1 给定系统的可靠水平状态

在系统的可靠水平状态给定为 α_i 的情况下，系统可能可靠性函数重述如下：

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi, \alpha_i}^{\varphi}(t_{im}) &= \Pi\{\varphi(x) \geq \alpha_i, \text{观测时刻 } t_{im} \text{ 时}\} \\ &= \Pi\{T_{sl} = t_{im} + t_{mp}(\alpha_i)\} \end{aligned} \quad (3-20)$$

鉴于系统的可靠水平状态 α_i 已为给定, 根据系统状态与其 MPRL 的函数关系, 式 (3-20) 中的 $t_{mp}(\alpha_i)$ 即是一常数, t_{im} 即为式 (3-20) 中唯一的一个变量, 给定不同的系统可靠水平状态 α_i , 式 (3-20) 可做如下分解:

- (1) 如果 $\alpha_i = 0$, 则 $\rho_{\Pi, \alpha_i}^{\varphi}(t_{im}) = \Pi\{T_{sl} = t_{im}\}$;
- (2) 如果 $0 < \alpha_i < 1$, 则 $\rho_{\Pi, \alpha_i}^{\varphi}(t_{im}) = \Pi\{T_{sl} = t_{im} + t_{mp}(\alpha_i)\}$;
- (3) 如果 $\alpha_i = 1$, 则 $\rho_{\Pi, \alpha_i}^{\varphi}(t_{im}) = \Pi\{T_{sl} = t_{im} + t_{mp}(1)\}$ 。

从而, 对于不同指定的系统可靠水平状态 α_i 会产生不同的系统可能可靠性函数。假设 α_j 、 α_k 是两个不同的状态且有 $\alpha_j \leq \alpha_k$, 根据状态与剩余寿命之间的单调递增关系可推得 $t_{\alpha_j} \leq t_{\alpha_k}$, 图 3-3 描述了不同的指定可靠水平状态对系统可能可靠性函数的影响。

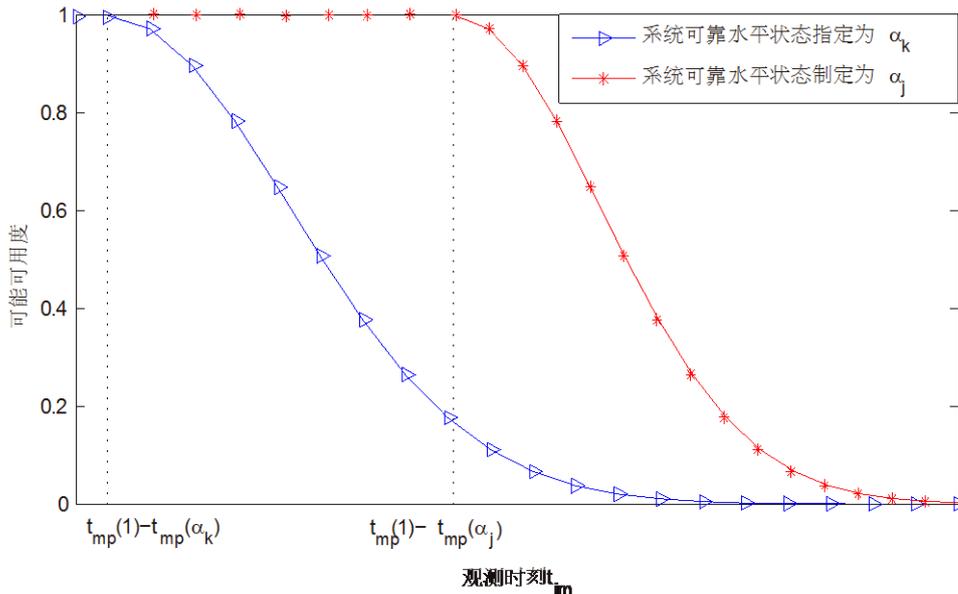


图 3-3 不同的指定可靠水平状态对系统可能可靠性函数的影响

当选取一个较高的系统可靠水平状态时, 系统的可能可靠性函数值会较选取一个偏低的系统可靠水平状态下更低。事实上, 系统可靠水平状态选取的越高, 系统则越难以得到那样的状态水平, 在其他相同的情况下, 系统可靠水平状态越高, 系统的可能可靠性函数值就越低。

3.4.2 给定系统的观测时刻

类似于 3.4.1 节中的讨论，当给定系统的观测时刻 T_i 时，系统可能可靠性函数重述如下：

$$\begin{aligned} \rho_{n, T_i}^{\varphi}(\alpha) &= \Pi\{\varphi(x) \geq \alpha, \text{ 观测时刻 } T_i \text{ 时}\} \\ &= \Pi\{T_{sl} = T_i + t_{mp}(\alpha)\} \end{aligned} \quad (3-21)$$

同样地，式 (3-21) 也可分解如下：

- (1) 如果 $T_i = 0$ ，则 $\rho_{n, T_i}^{\varphi}(\alpha) = \Pi\{T_{sl} = t_{mp}(\alpha)\}$ ；
- (2) 如果 $0 < T_i < t_{mp}(1)$ ，则 $\rho_{n, T_i}^{\varphi}(\alpha) = \Pi\{T_{sl} = T_i + t_{mp}(\alpha)\}$ ；
- (3) 如果 $T_i = t_{mp}(1)$ ，则 $\rho_{n, T_i}^{\varphi}(\alpha) = \Pi\{T_{sl} = t_{mp}(1) + t_{mp}(\alpha)\}$ 。

此外，假设 $T_j \leq T_k$ ，图 3-4 描述了系统不同的观测时刻对系统可能可靠性函数的影响。

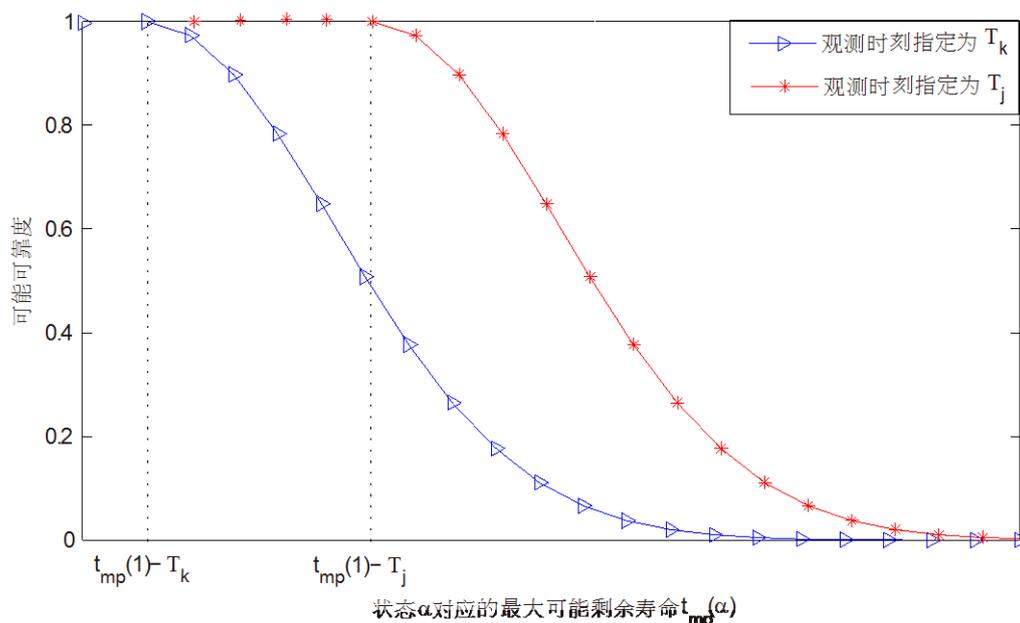


图 3-4 系统不同的观测时刻对系统可能可靠性函数的影响

与前一节类似，如系统观测时刻指定的较晚，则会引出较低的系统可能可靠性函数值，因为观测时刻指定的越晚就越难达到指定的可靠水平。

3.5 典型系统的可能可靠性分析

本节将对串联系统、并联系统、串-并联系统、并-串联系统、冷贮备系统等典型系统，应用可能性理论对其进行可靠性分析。

3.5.1 串联系统的可能可靠性

对于由图 3-5 所示的 n 阶串联系统，设 x 和 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 分别为系统状态和部件状态，则有：

$$x = \phi(\mathbf{x}) = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

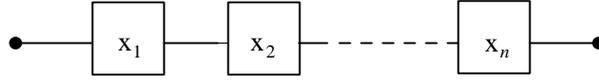


图 3-5 串联系统的逻辑框图

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi}^{\phi}(\alpha, t_{im}) &= \Pi\{\phi(\mathbf{x}) \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \\ &= \Pi\{\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \\ &= \Pi(\{x_1 \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \cap \{x_2 \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \cap \dots \cap \{x_n \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\}) \\ &\leq \bigwedge_{i=1}^n \Pi\{x_i \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \end{aligned}$$

上式说明，串联系统的可能可靠性小于所有部件可能可靠性的最低值。

3.5.2 并联系统的可能可靠性

对一个由图 3-6 所示的由 n 个部件构成的并联系统， x 和 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 分别为系统状态和部件状态，则系统状态的结构函数描述如下：

$$x = \phi(\mathbf{x}) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

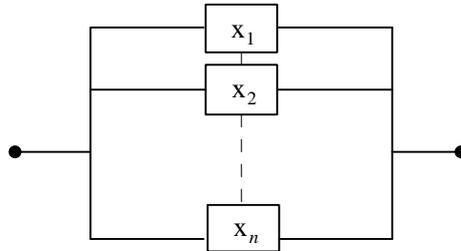


图 3-6 并联系统的逻辑框图

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi}^{\phi}(\alpha, t_{im}) &= \Pi\{\phi(\mathbf{x}) \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \\ &= \Pi\{\max(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \\ &= \Pi(\{x_1 \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \cup \{x_2 \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \cup \dots \cup \{x_n \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\}) \\ &= \bigvee_{i=1}^n \Pi\{x_i \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im}\} \end{aligned}$$

上式说明，并联系统的可能可靠性等于所有部件可能可靠性的最高值。

3.5.3 串并联混合系统的可能可靠性

(1) 串-并系统

如图 3-7 所示，系统由 m 个子系统串联而成，每个子系统都是由 n 个部件构成的并联系统。

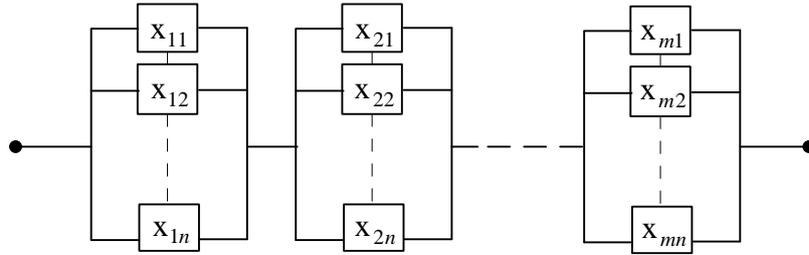


图 3-7 串-并系统的逻辑框图

设 x 和 $x_{ij} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 分别为系统状态和部件状态，则系统状态的结构函数是：

$$x = \phi(\mathbf{x}) = \min \{ \max(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \max(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots, \max(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) \}$$

从而，串-并系统的可能可靠性为：

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi}^{\phi}(\alpha, t_{im}) &= \Pi \{ \phi(\mathbf{x}) \succeq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \} \\ &= \Pi \left\{ \min \left\{ \max(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \max(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots, \max(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) \right\} \succeq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \right\} \\ &= \Pi \left(\left\{ \max(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) \succeq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \right\} \cap \left\{ \max(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) \succeq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \right\} \cap \dots \right. \\ &\quad \left. \cap \left\{ \max(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) \succeq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \right\} \right) \\ &\leq \bigwedge_{i=1}^m \Pi \{ \max(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \succeq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \} \\ &= \bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j=1}^n \Pi \{ x_{ij} \succeq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \} \right) \end{aligned}$$

(2) 并-串联系统

如图 3-8 所示，系统由 m 个子系统并联而成，每个子系统都是由 n 个部件构成的串联系统。

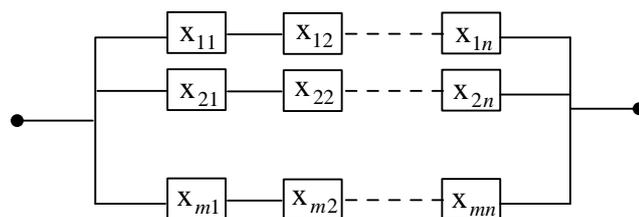


图 3-8 并-串联系统的逻辑框图

设 x 和 $x_{ij} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 分别为系统状态和部件状态，则系统状态的结构函数为：

$$x = \phi(\mathbf{x}) = \max \{ \min(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \min(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots, \min(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) \}$$

从而并-串联系统的可能可靠性为：

$$\begin{aligned} & \rho_{\Pi}^{\phi}(\alpha, t_{im}) \\ &= \Pi \left\{ \max \left\{ \min(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \min(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots, \min(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) \right\} \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \right\} \\ &= \Pi \left(\left\{ \min(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \right\} \cup \left\{ \min(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \right\} \cup \dots \cup \left\{ \min(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \right\} \right) \\ &= \bigvee_{i=1}^m \Pi \{ \min(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \} \\ &\leq \bigvee_{i=1}^m \left(\bigwedge_{j=1}^n \Pi \{ x_{ij} \geq \alpha, \text{ 时刻 } t_{im} \} \right) \end{aligned}$$

3.5.4 贮备系统的可能可靠性

贮备系统是为了提高系统的可靠性，除了给原系统并联上一些部件外，还留有备用部件的系统。贮备系统可分为冷贮备系统和温贮备系统两种。冷贮备系统中的贮备部件在贮备期间不失效也不劣化；而温贮备系统是指贮备部件在贮备期内也可能失效的系统。系统由 n 个部件和一个转换开关组成。当 n 个部件都正常时，系统中一个部件处于工作状态，其余部件处于贮备状态。当工作部件发生故障，贮备部件通过开关转为工作状态去替换故障部件；修理设备对故障部件进行修理。贮备部件替换故障部件通过转换开关来实现，开关转换在瞬间完成。当所有部件都发生故障时，系统失效。

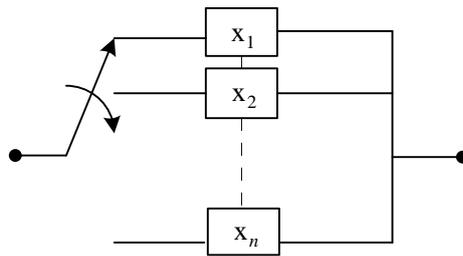


图 3-9 贮备系统的逻辑框图

设 x 和 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 分别为系统状态和部件状态，从结构函数的思想出发，贮备系统的状态即是正在工作的部件状态，若所有部件均故障，则贮备系统处于故障状态。同时，若部件仅有贮备、正常工作和故障三个状态，那么一旦部件发生故障，贮备部件便通过开关转为工作状态去替换故障部件。于是，贮备系统中只要存在处于非故障状态的部件，系统便处于工作状态。从这一分析和系统状态结构函数的观点出发，可以推得此时贮备系统的结构函数如下：

$$x = \phi(\mathbf{x}) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

由此可以推得，当部件仅有贮备、正常工作和故障三个状态，此时的贮备系统结构函数与并联系统结构函数相同。

3.6 数值算例

在此算例中，部分数据选取自对 CF6-80C2A5 发动机机队的实证分析^[138]。假设发动机是研究的系统对象，状态 1 表征发动机完好工作的状态而状态 0 表征发动机应被拆换的状态，那么，系统寿命即是发动机的在翼时间（Time to Wing, TOW）。发动机的拆换有多种原因，可能是发动机性能衰退、LLP (Life Limited Part) 剩余时间的限制，也可能会结合适航指令（Airworthiness Dictate, AD）或服务通告（Service Bulletin, SB）。表 3-1 中给出了发动机在翼时间的可能性分布，图 3-10 为离散分布图。

表 3-1 发动机在翼时间的可能性分布

寿命 T_{sl} (h)	[0,8000]	(8000,8500]	(8500,9000]	(9000,10000]	(10000,11000]
$\Pi(T_{sl})$	1	0.9	0.7	0.5	0.3

从表 3-1 中可以得出，发动机在拆换前保有完全可能性的最大工作时间为

8000h。这表明，发动机的现有水平足以连续工作 8000h，可这并不能说明发动机在拆换前一定可以连续工作 8000h 以上。同样地，对于可能性小于 1 所对应的系统寿命区间，发动机完全有可能达到，只是发动机不保有完全的可能性达到某一工作时间。

采用 3.3.4 节中归纳的步骤，下一步是建立系统状态与其对应的最大可能剩余寿命的关系。状态 1 对应的剩余寿命分布即是发动机在翼时间的可能性分布，每一状态对应一个剩余寿命分布。首先，依据这 9 个发动机参数对状态进行分类：截尾指示量、排气温度偏差、燃油消耗量偏差、高压转子转速偏差、滑油压力偏差、低压转子振动值偏差、高压转子振动值偏差、起飞排气温度裕度、起飞外界温度限制。图 3-2 所示的系统状态与其 MPRL 之间的关系，其大致的趋势如图 3-11 中虚线所示。

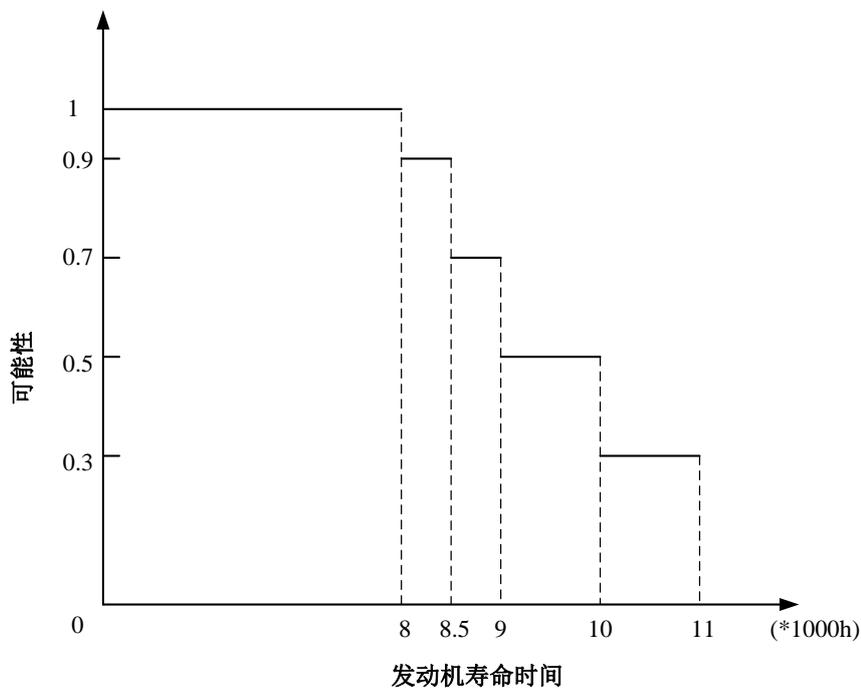


图 3-10 发动机在翼时间的可能性分布

发动机的状态是由单位区间[0,1]描述的。状态 1 表征发动机的所有参数都处于很好的状态，发动机处于完好工作的状态。当大部分参数指标下降到较好的水平，或者一些参数指标仍然处于很好的状态而一些参数指标所对应的情况已经开始劣化，此时已经来到状态 0.8。当大部分参数指标都劣化到一定程度，划分为状态 0.6；而状态 0.4 则表示发动机系统的几乎所有参数指标都下降到相当的一个程度，状态

0 则对应着发动机应该拆换的状态。表中的这些数据是基于有限的实验数据和丰富的专家经验采用线性模型得到的。

表 3-2 系统状态对应 MPRL

状态 α	1	0.8	0.6	0.4	0
MPRL $t_{mp}(\alpha)$ (h)	8000	5600	4000	2300	0

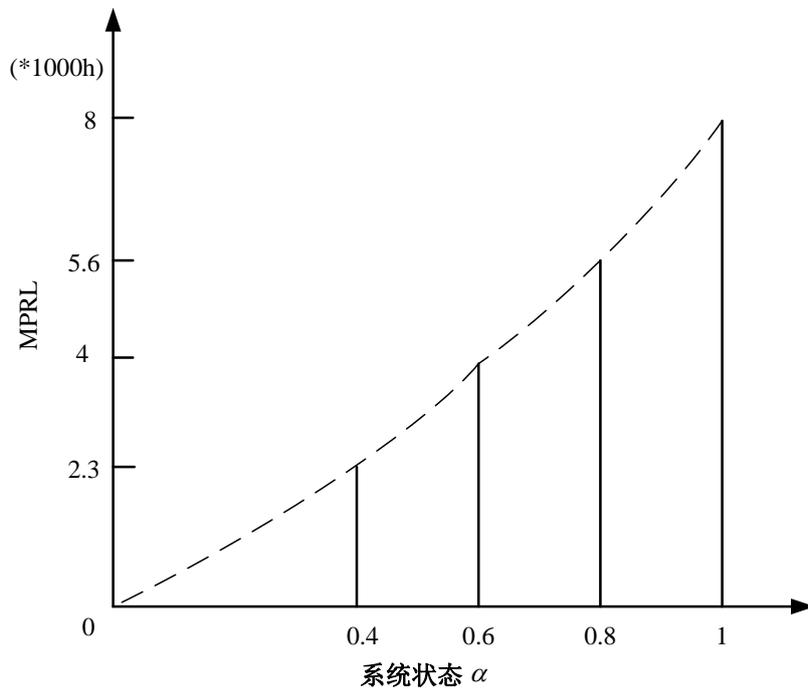


图 3-11 发动机状态与其 MPRL 的关系

进而，从多个方面分析发动机在翼的可能可靠性函数：

(1) 假设取定可靠水平为在翼 5000h 后能保持状态 0.6，即 $t_{mp}(1) = 8000h$ ， $t_{im} = 5000h$ ， $\alpha = 0.6$ 。从而，

$$\begin{aligned}
 \rho_{\Pi}(0.6, 5000) &= \Pi\{\phi(x) \geq 0.6, \text{当 } t_{im} = 5000\} \\
 &= \Pi\{T_{mp}(5000) \geq t_{mp}(0.6)\} \\
 &= \Pi\{T_{st} \geq 5000 + 4000\} \\
 &= \Pi\{T_{st} = 9000\} \\
 &= 0.7
 \end{aligned}$$

这说明，系统以 0.7 的可能性达到在翼 5000h 后能保持状态 0.6 这一可靠水平。

(2) 指定可靠水平为在翼 2000h 后能保持状态 0.8，即 $t_{mp}(1) = 8000h$ ，

$t_{im} = 2000h$, $\alpha = 0.8$, 从而,

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi}(0.8, 2000) &= \Pi\{T = 2000 + t_{mp}(0.8)\} \\ &= \Pi\{T = 7600\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

这个结果表明, 系统保有完全的可能性达到给定的可靠水平, 这是系统的能力的反应, 然而这并不能说明系统一定会达到这一可靠水平, 系统只是完全能够做到。

(3) 给定系统可靠的状态水平为 $\alpha = 0.8$, 不同选择的观测时刻对系统可能可靠性产生的变化如图 3-12 所示。

$$\rho_{\Pi}(0.8, t_{im}) = \rho_{\Pi}^{0.8}(t_{im}) = \Pi\{T_{sl} = t_{im} + t_{mp}(0.8)\} = \Pi\{T_{sl} = t_{im} + 5600\}$$

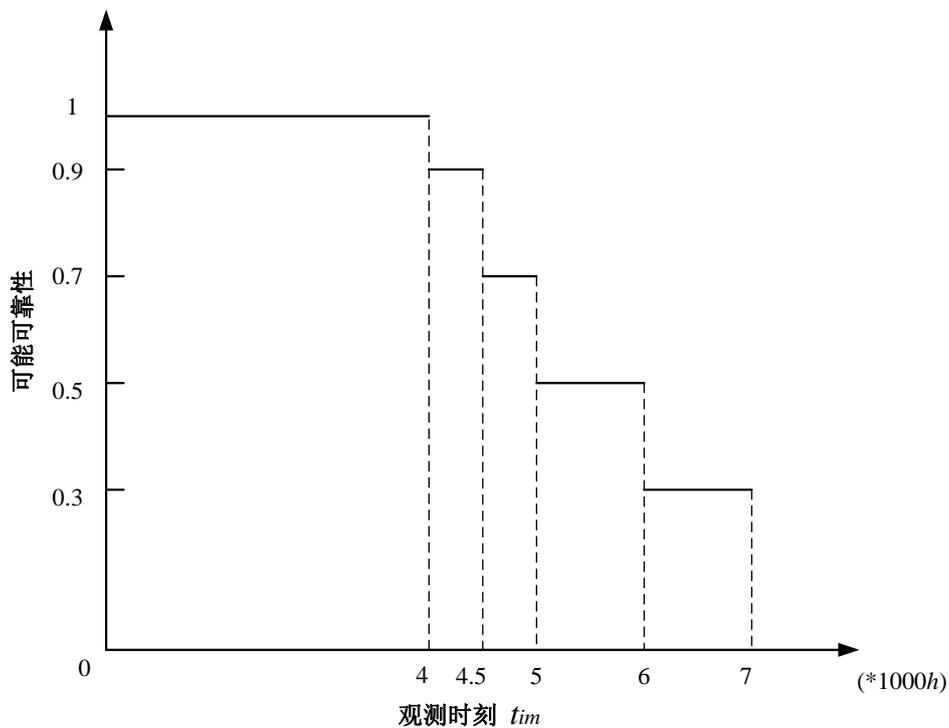


图 3-12 不同的观测时刻对系统可能可靠性的影响

(4) 给定系统的观测时刻为 $t_{im} = 4200h$, 系统可能可靠性为:

$$\rho_{\Pi}(\alpha, 4200) = \rho_{\Pi}^{4200}(\alpha) = \Pi\{T_{sl} = 4200 + t_{mp}(\alpha)\}$$

不同选择的系统可靠状态水平对系统可能可靠性产生的变化列于表 3-3。

表 3-3 不同的系统可靠状态水平对系统可能可靠性的影响

状态 α	1	0.8	0.6	0.4	0
可能可靠性 $\rho_{\Pi}(\alpha, 4200)$	0	0.5	0.9	1	1

由表 3-3 可以得出，发动机在翼 4200h 后，仍以完全的可能性保持状态 0.4。如果选取可靠水平为发动机在翼 4200h 后可以保持状态 0.6，那么系统的可能可靠性就降低到 0.9。

本节中的数值算例说明：

(1) 给定可靠水平为某一指定观测时刻下保持某一特定水平状态，根据系统的寿命可能性分布函数以及系统状态和对应剩余寿命之间的函数关系，可以计算分析得到系统可能可靠性。

(2) 指定某一观测时刻或某一水平状态，系统可能可靠性便成为另一变量的单调函数。若给定某一观测时刻，则随着状态水平选取的越高，系统可能可靠性取值越低。对给定某一水平状态，则随着观测时刻的往后推移，使得系统可能可靠性取值越低。因为不管是状态水平选取的越高，还是观测时刻的往后推移，结果都是使得系统的可靠水平变高，更加不易于达到该可靠水平，所以都使得系统可能可靠性取值变低。

3.7 本章小结

可能可靠性理论是建立在可能性理论上的可靠性理论。本章延续了 Cappelle 和 Kerre 提出的将多态系统与可能性理论相结合的可能可靠性理论，在提出的系统可能可靠性函数的定义上引入新的变量，建立了系统状态与其对应的最大可能剩余寿命之间的函数关系。在此基础上，将难以入手的系统状态可能性分析转化为一定条件下对系统寿命可能性的分析。随后，对系统的可靠水平状态 α 和观测时刻 t_{im} 对系统可能可靠性的影响进行分析，得到了给定系统可靠水平和系统可能可靠性的一系列关系，并为将其应用到实际工程中提供了基础。下一章将进一步考虑可修系统，介绍部分故障影响可忽略或延迟的系统新模型，通过可能可靠性理论计算分析系统的可能可用度等可靠性指标。

第四章 部分故障影响可忽略或延迟的可修系统可靠性分析

4.1 引言

每个系统都要完成规定的一个或多个功能，当系统不能完成至少一个规定功能时，不需替换整个系统，只经过维修就可以达到顺利完成所有规定功能状态的系统就是可修系统^[139]。可修系统是可靠性数学的主要研究对象之一，也是系统可靠性理论中讨论的一类重要系统，使可修系统保有高可靠性是研究可修系统的首要任务^[140]。很多学者已经对可修系统的可靠性做了大量研究，并建立了相应的模型^[141-145]。

过去的有关可修系统模型的文献大多基于一个假设，那就是若系统发生故障，则立即判断系统失效并进入维修状态^[141-144]。然而在实际情况中，一些系统失效由于修复时间短及失效类型的原因，对系统的正常运作几乎不产生影响，人们更倾向于直接忽略掉或是延迟这一段维修时间。事实上，如果系统只是短暂的接受维修而不影响正常工作时，可以认为系统在这段维修间隔期间亦是处于工作状态的，也就是说，如果维修时间很短（在可接受的范围内），则可以忽略维修时间内的系统失效，认为系统虽处于维修时间内，但仍在工作（称作可忽略失效，Failure Effect Omitted）；同时，如果维修时间超出可接受的范围，系统在给定的可接受时间范围内无法完成维修，那就无法忽略系统的失效，只能视为系统在给定的可接受时间范围内处于工作状态，而超出这个时间范围以后则处于维修状态，即是视为将系统的失效延迟了给定的可接受时间（称作可延迟失效，Failure Effect Delayed）。

近年来，有关学者研究了这类基于实际操作假设的可修系统。郑治华^[145]首先基于单部件可修系统提出可忽略失效的模型，假设系统短暂的故障维修不会引起系统失效，对系统可用度进行分析。在此可修系统的部分故障影响可忽略的假设下，李红霞^[146]研究了串联可修系统，在部件寿命和维修时间服从指数分布的假设下对系统的瞬时可用度和稳态可用度进行分析。吕佳^[147]建立故障影响忽略的同分布两部件并联可修系统，并得出若干可靠性数量指标的公式。郑治华^[148]进一步对同分布的 n 部件并联可修系统建立故障影响可忽略的模型。贾治宇等^[149]以同样的模型假设研究 $k/n(G)$ 表决系统，在考虑可忽略失效的背景下研究系统的可靠性指

标, 得出系统可用度的描述。此外, 文献[150]和[151]还分别针对单部件可维修系统和串联可修系统提出并分析了可忽略或延迟失效的模型。

本章第二节以两不同型部件并联马尔科夫系统为对象, 给出原系统和考虑部分故障可忽略的新系统的模型假设。以概率论和可靠性理论为依据, 在原系统可靠性指标的基础上对部分故障可忽略的两部件并联新系统进行可靠性分析, 并给出和证明可靠性指标的表达式。

本章第三节将介绍单部件可修系统的原有模型假设, 建立部分故障影响可忽略或可延迟的单部件可修系统新模型, 并对两个模型加以区分。进而运用可能性理论对可忽略或可延迟失效的可修系统新模型展开可能可靠性分析。

4.2 部分故障影响可忽略的并联可修系统可靠性分析

本节基于维修理论的实际问题, 建立一类由两个部件组成的马尔科夫并联可修系统的模型, 模型中该系统的主要特征是: 当系统的某段故障维修时间很短(小于给定的维修阈值), 不至影响系统的正常工作, 则可以认为这次故障对系统工作没有影响, 认为系统在维修时间内也处于工作状态。考虑维修阈值为常数和非负随机变量两种情况, 得到系统的瞬时可用度等可靠性指标。

4.2.1 传统并联可修系统与可忽略失效的并联可修系统模型假设

本小节将分别介绍两部件并联可修系统的原有模型假设和部分故障可忽略的新模型假设, 同时对其不同点加以分析。首先, 介绍原有模型假设^[152,153]:

(1) 系统由两个不同型部件并联而成, 有一个修理设备。若一个部件发生故障, 修理设备立即进行维修, 部件修复后立即进入工作状态; 若一个故障部件未修复时另一部件也发生故障, 则后发生故障的部件处于待修状态, 即先坏先修, 此时系统进入故障状态。

(2) 假设两个部件的寿命时间 X_1, X_2 分别服从参数为 λ_i 的指数分布 $F_i(t)$, 部件故障后的维修时间 Y_1, Y_2 分别服从参数为 μ_i 的指数分布 $G_i(t)$, $i=1,2$, 所有随机变量都是相互独立的, 即有:

$$\begin{cases} F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \lambda_i > 0 \\ G_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}, \mu_i > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2; t \geq 0 \quad (4-1)$$

(3) 两个部件在初始时刻 $t=0$ 都是新的, 且维修部件可修复如新。

由模型的建立，可以得到原系统的五个不同状态，定义如下：

状态 0：两部件都正常，此时系统处于工作状态；

状态 1：部件一正常，部件二故障（即处于维修状态），此时系统处于工作状态；

状态 2：部件二正常，部件一故障（即处于维修状态），此时系统处于工作状态；

状态 3：部件一处于维修状态，部件二待修，此时系统处于故障状态；

状态 4：部件二处于维修状态，部件一待修，此时系统处于故障状态。

易得：

$$E = \{0,1,2,3,4\}, W = \{0,1,2\}, F = \{3,4\}.$$

令 $X(t)$ 表示时刻 t 原系统所处的状态，即

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{在时刻 } t, \text{ 两部件都正常, 系统处于工作状态} \\ 1, & \text{在时刻 } t, \text{ 部件一正常, 部件二故障维修, 系统处于工作状态} \\ 2, & \text{在时刻 } t, \text{ 部件二正常, 部件一故障维修, 系统处于工作状态} \\ 3, & \text{在时刻 } t, \text{ 部件一故障维修, 部件二故障待修, 系统处于故障状态} \\ 4, & \text{在时刻 } t, \text{ 部件二故障维修, 部件一故障待修, 系统处于故障状态} \end{cases}$$

由指数分布的无记忆性易知， $\{X(t), t \geq 0\}$ 是状态空间为 E 的齐次马尔科夫过程。事实上，由于部件的寿命分布和修理时间分布是指数分布，时刻 t 以后系统发生故障的概率规律完全由时刻 t 的系统状态决定，而与时刻 t 以前的历史无关。

下面介绍原系统与部分故障影响可忽略的两部件并联系统（新系统）的主要区别：当原系统进入故障状态时，维修设备正在对先发生故障的部件进行维修。给定某一临界值 $\tau (\tau \geq 0)$ ，当维修时间比 τ 短时，即对系统的修复在小于或等于 τ 的时间内完成，则新系统认为这段故障时间可以忽略，也即是新系统在这段时间内处于工作状态，而在原系统中，系统在这段时间内是处于故障状态的。

在原系统的基础上，新的两部件并联可修系统模型建立如下：

(1) 新系统由两个不同型部件并联而成，有一个修理设备。新系统在初始时刻 $t = 0$ 是新的；所有随机变量相互独立；先坏先修且每个故障部件可修复如新。

(2) 与原系统相同，两部件的寿命时间 X_1, X_2 分别服从参数为 λ_i 的指数分布 $F_i(t)$ ，部件故障后的维修时间 Y_1, Y_2 分别服从参数为 μ_i 的指数分布 $G_i(t)$ 。此外， $Q_i(t)$ 表示部件 i 等待维修时间的分布， $i = 1, 2$ ，具体分布将在 4.2.2 节中分析介绍。

(3) 若原系统处于工作状态，新系统也处于工作状态。

(4) 若原系统处于故障状态且修复时间小于或等于给定维修临界值 τ 时，新

系统处于工作状态。

(5) 当原系统处于故障状态且修复时间大于给定临界值 τ 时，新系统处于故障状态。

(6) 临界值 τ 的选取可以是某一给定常数，也可以是非负随机变量。假定若 τ 为一非负随机变量时，则服从概率分布 $H(\tau)$ 。

显然，当 $\tau = 0$ 时，新系统即为原系统；当 $\tau = \infty$ 时，新系统永远都不会发生故障。可以用图 4-1 来形象地展示原系统与新系统的区别。

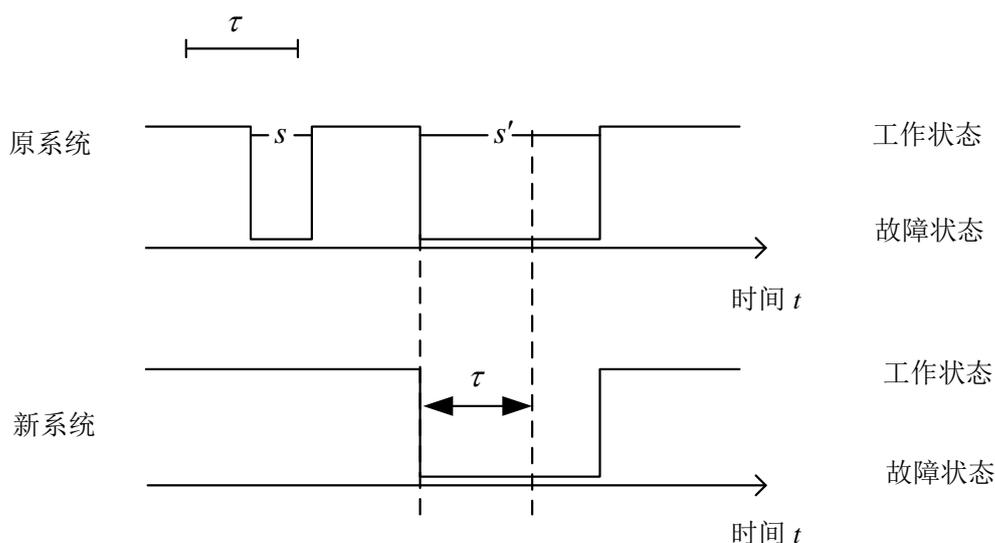


图 4-1 原并联系统与部分故障可忽略的新系统之间的比较

令 $\tilde{X}(t)$ 表示时刻 t 新系统所处的状态，则：

$$\tilde{X}(t) = \begin{cases} 0, & \text{在时刻 } t, \text{ 新系统处于工作状态} \\ 1, & \text{在时刻 } t, \text{ 新系统处于故障状态} \end{cases}$$

易知，原系统的运行服从马尔可夫过程，具有马尔可夫性，而新系统则不再具备这样的性质。在新系统中，由于部分故障可忽略的假设，时刻 t 以后系统的发展规律与到达时刻 t 之前系统已工作了多长时间或已故障了多长时间相关，而不完全由时刻 t 的系统状态所决定。新系统在时刻 t 后的发展与时刻 t 以前的历史有关，于是马尔可夫性在新系统中不成立。

4.2.2 部分故障可忽略的并联可修系统可靠性指标分析

新系统的维修性指标是在原系统指标的基础上进行推导的，本节主要讨论系统的瞬时可用度指标。设 $A(t)$ 、 A 分别表示原系统的瞬时可用度和稳态可用度， $\tilde{A}(t)$ 、 \tilde{A} 分别表示新系统的瞬时可用度、稳态可用度， $A'_i(t)$ 为考虑有修理延迟的

部件 i ($i=1,2$) 的瞬时可用度, $A_1(t)$, $A_2(t)$ 分别表示以单个部件一或部件二为系统时的瞬时可用度。利用马尔可夫过程的方法, 文献[152]研究并得到如下的可靠性指标:

$$A_1(t) = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} e^{-(\lambda_1 + \mu_1)t} \quad (4-2)$$

$$A_2(t) = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} e^{-(\lambda_2 + \mu_2)t} \quad (4-3)$$

对于考虑有修理延迟的单部件 i , $i=1,2$, 瞬时可用度 $A'_i(t)$ 的拉普拉斯变换 $A_i^*(s)$ [154]为:

$$A_i^*(s) = \frac{1/s(1 - \hat{F}_i(s))}{1 - \hat{F}_i(s)\hat{G}_i(s)\hat{Q}_i(s)} \quad (4-4)$$

式中, $\hat{F}_i(s)$ 、 $\hat{G}_i(s)$ 和 $\hat{Q}_i(s)$ 分别表示 $F_i(t)$ 、 $G_i(t)$ 和 $Q_i(t)$ 的拉普拉斯-司蒂杰斯变换 (Laplace-Stieltjes form)。

定理 4-1 假设取定维修时间临界值 τ_i ($i=1,2$) 为常数, 新系统的瞬时可用度 $\tilde{A}(t)$ 为:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) = A(t) &+ \int_0^{\min(t, \tau_1)} \int_0^{s_1} \lambda_1 \lambda_2 A_1(t-s_1) A_2'(t-s_2) P(s_1 < Y_1 < \tau_1) ds_2 ds_1 \\ &+ \int_0^{\min(t, \tau_2)} \int_0^{s_2} \lambda_1 \lambda_2 A_1'(t-s_1) A_2(t-s_2) P(s_2 < Y_2 < \tau_2) ds_1 ds_2 \end{aligned} \quad (4-5)$$

证明: 由新系统模型的假设, 根据瞬时可用度定义可知:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= P(\text{在时刻 } t \text{ 新系统处于工作状态}) \\ &= P(\tilde{X}(t) = 0) \\ &= P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 0) + P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 1) + P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 2) \\ &\quad + P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 3) + P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 4) \end{aligned}$$

由于模型假设原系统处于工作状态时, 新系统也处于工作状态, 故有:

$$\begin{aligned} A(t) &= P(X(t) = 0) + P(X(t) = 1) + P(X(t) = 2) \\ &= P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 0) + P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 1) + P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 2) \end{aligned}$$

于是, 新系统瞬时可用度可以转化为:

$$\tilde{A}(t) = A(t) + P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 3) + P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 4) \quad (4-6)$$

由此, 要得到新系统瞬时可用度, 只需确定 $P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 3)$ 和 $P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 4)$ 两项。式 $P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 3)$ 表示在时刻 t , 部件一维修、部件二故障待修且部件一的维修时间不长于 τ_1 的概率, 由随机变量的独立性, 可得:

$$\begin{aligned}
 & P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 3) \\
 &= P(\text{时刻 } t, \text{ 部件一维修, 部件二待修, 部件一维修时间} \leq \tau_1) \\
 &= P(\text{时刻 } t, \text{ 部件一维修, 部件一维修时间} \leq \tau_1) \cdot P(\text{时刻 } t, \text{ 部件二待修}) \quad (4-7) \\
 &= \int_0^{\min(t, \tau_1)} A_1(t-s_1) \lambda_1 P(s_1 < Y_1 < \tau_1) \int_0^{s_1} A_2'(t-s_2) \lambda_2 ds_2 ds_1 \\
 &= \int_0^{\min(t, \tau_1)} \int_0^{s_1} \lambda_1 \lambda_2 A_1(t-s_1) A_2'(t-s_2) P(s_1 < Y_1 < \tau_1) ds_2 ds_1
 \end{aligned}$$

式中, 第三个等式是考虑到部件一较部件二先故障, 部件一在时间区间 $(t-s_1, t-s_1+ds_1)$ 内由工作状态转为故障维修状态, 在部件一发生故障之后, 部件二在时间区间 $(t-s_2, t-s_2+ds_2)$ 内由工作状态转为故障待修状态。由于 $t-s_1 < t-s_2$, 故 $s_2 < s_1$ 。

从另外一个角度来说, 部件二的故障待修时间等于部件一的维修时间减去部件一二的故障时刻差, 故而部件二的等待维修时间服从分布 $Q_2(t) = G_1[t - (s_1 - s_2)]$ 。同样地, 若部件二先于部件一发生故障, 即 $t-s_2 < t-s_1$, $s_1 < s_2$, 从而部件一的等待维修时间服从分布 $Q_1(t) = G_2[t - (s_2 - s_1)]$ 。于是可记部件 i 的等待维修时间服从分布 $Q_i(t) = G_j[t - (s_j - s_i)]$, $i \neq j$, $i, j=1, 2$, $\forall s_j > s_i$ 。

同时, $A_1(t-s_1)$ 表示部件一在时刻 $t-s_1$ 处于工作状态的概率, 由于部件寿命时间服从指数分布, 所以 λ_1 具有部件一失效率的意义。 $A_1(t-s) \lambda_1 P(s_1 < Y_1 < \tau_1) ds_1$ 表示部件一在 $(t-s_1, t-s_1+ds_1)$ 中由工作转为故障维修状态, 且修理时间 Y_1 介于 (s_1, τ_1) 之间的概率, 也就是表征时刻 t 部件一在维修, 且维修时间不超过给定的临界值 τ_1 。这样, 由于 $A_1(t-s_1) \lambda_1 P(s_1 < Y_1 < \tau_1)$ 与 s_2 之间的独立性, 便可以得到式 (4-7) 中第四个等式。

同理, 由式 (4-7), 可以得到 $P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 4)$ 的数学表达式如下:

$$P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 4) = \int_0^{\min(t, \tau_2)} \int_0^{s_2} \lambda_1 \lambda_2 A_1'(t-s_1) A_2(t-s_2) P(s_2 < Y_2 < \tau_2) ds_1 ds_2 \quad (4-8)$$

将式 (4-7) 和式 (4-8) 代入式 (4-6), 即可得到式 (4-5)。证毕。

定理 4-2 若 τ_i 为非负随机变量, 设 τ_i 服从分布 $H_i(\tau)$, $i=1, 2$, 则新系统的瞬时可用度 $\tilde{A}(t)$ 为:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}(t) &= A(t) + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \int_0^{s_1} \lambda_1 \lambda_2 A_1(t-s_1) A_2'(t-s_2) P(s_1 < Y_1 < \tau_1) ds_2 ds_1 dH_1(\tau) \\
 &\quad + \int_t^\infty \int_0^t \int_0^{s_1} \lambda_1 \lambda_2 A_1(t-s_1) A_2'(t-s_2) P(s_1 < Y_1 < \tau_1) ds_2 ds_1 dH_1(\tau) \\
 &\quad + \int_0^t \int_0^{\tau_2} \int_0^{s_2} \lambda_1 \lambda_2 A_1'(t-s_1) A_2(t-s_2) P(s_2 < Y_2 < \tau_2) ds_1 ds_2 dH_2(\tau) \\
 &\quad + \int_t^\infty \int_0^t \int_0^{s_2} \lambda_1 \lambda_2 A_1'(t-s_1) A_2(t-s_2) P(s_2 < Y_2 < \tau_2) ds_1 ds_2 dH_2(\tau)
 \end{aligned} \tag{4-9}$$

证明：由定理 4-1 中的分析可得：

$$\begin{aligned}
 &P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 3) \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{m_i n_i \tau_i} \int_0^{s_1} \lambda_1 \lambda_2 A_1(t-s_1) A_2'(t-s_2) P(s_1 < Y_1 < \tau_1) ds_2 ds_1 dH_1(t) \\
 &= \int_0^t \int_0^{\tau_1} \int_0^{s_1} \lambda_1 \lambda_2 A_1(t-s_1) A_2'(t-s_2) P(s_1 < Y_1 < \tau_1) ds_2 ds_1 dH_1(\tau) \\
 &\quad + \int_t^\infty \int_0^t \int_0^{s_1} \lambda_1 \lambda_2 A_1(t-s_1) A_2'(t-s_2) P(s_1 < Y_1 < \tau_1) ds_2 ds_1 dH_1(\tau)
 \end{aligned} \tag{4-10}$$

同理可得：

$$\begin{aligned}
 &P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 4) \\
 &= \int_0^t \int_0^{\tau_2} \int_0^{s_2} \lambda_1 \lambda_2 A_1'(t-s_1) A_2(t-s_2) P(s_2 < Y_2 < \tau_2) ds_1 ds_2 dH_2(\tau) \\
 &\quad + \int_t^\infty \int_0^t \int_0^{s_2} \lambda_1 \lambda_2 A_1'(t-s_1) A_2(t-s_2) P(s_2 < Y_2 < \tau_2) ds_1 ds_2 dH_2(\tau)
 \end{aligned} \tag{4-11}$$

最后，将 $P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 3)$ 和 $P(\tilde{X}(t) = 0, X(t) = 4)$ 的表达式 (4-10) 和 (4-11) 代入式 (4-6)，便得到定理 4-2 的证明。

给定系统的维修时间临界值 τ_i ($i=1,2$)，依据临界值为常数和随机变量的不同，新系统在时刻 t 的瞬时可用度 $\tilde{A}(t)$ 可分别由定理 4-1 和定理 4-2 结合部件的寿命分布和修理时间分布得到。

4.2.3 数值算例

本节中将以两部件并联系统为对象，分别考察原系统和考虑部件故障可忽略的新系统，得到系统稳态可用度。

假设部件 1 和部件 2 的工作寿命分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的指数分布，维修时间同时服从参数为 μ 的指数分布。设 $\lambda_1 = 0.05$ ， $\lambda_2 = 0.1$ ， $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 0.5$ ，原系统

的稳态可用度和相关分布计算如下^[152]:

$$\begin{aligned}
 A &= 0.97 \\
 F_1(t) &= 1 - e^{-0.05t} \\
 F_2(t) &= 1 - e^{-0.1t} \\
 G(t) = G_1(t) = G_2(t) &= 1 - e^{-0.5t} \\
 Q_1(t) = G_2[t - (s_2 - s_1)] &= 1 - e^{-0.5t} \cdot e^{0.5(s_2 - s_1)} \\
 Q_2(t) = G_1[t - (s_1 - s_2)] &= 1 - e^{-0.5t} \cdot e^{0.5(s_1 - s_2)}
 \end{aligned}$$

此外, $F_i(t)$ 、 $G_i(t)$ 和 $Q_i(t)$ 的拉普拉斯-司蒂杰斯变换分别为:

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_1(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF_1(t) = \frac{0.05}{s+1.05} \\
 \hat{F}_2(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF_2(t) = \frac{0.1}{s+1.1} \\
 \hat{G}_i(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dG_i(t) = \frac{0.5}{s+1.5} \\
 \hat{Q}_1(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dQ_1(t) = \frac{0.5}{s+1.5} \cdot e^{0.5(s_2 - s_1)} \\
 \hat{Q}_2(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dQ_2(t) = \frac{0.5}{s+1.5} \cdot e^{0.5(s_1 - s_2)}
 \end{aligned}$$

对于新系统, 假设 $\tau = \tau_i = 1$, ($i=1,2$)且 $\tau < t$, 由式 (4-5) 可得新系统的瞬时可用度表达式如下:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}(t) &= A(t) + \int_0^{\min(t, \tau_1)} \int_0^{s_1} \lambda_1 \lambda_2 A_1(t-s_1) A_2'(t-s_2) P(s_1 < Y_1 < \tau_1) ds_2 ds_1 \\
 &+ \int_0^{\min(t, \tau_2)} \int_0^{s_2} \lambda_1 \lambda_2 A_1'(t-s_1) A_2(t-s_2) P(s_2 < Y_2 < \tau_2) ds_1 ds_2 \\
 &= A(t) + \frac{1}{200} \int_0^1 A_1(t-s_1) P(s_1 < Y < 1) \int_0^{s_1} A_2'(t-s_2) ds_2 ds_1 \\
 &+ \frac{1}{200} \int_0^1 A_2(t-s_2) P(s_2 < Y < 1) \int_0^{s_2} A_1'(t-s_1) ds_1 ds_2
 \end{aligned} \tag{4-12}$$

先计算 $A_i'(t)$, 为此首先给出 $A_1'(t)$ 和 $A_2'(t)$ 的拉普拉斯变换, 由式 (4-4) 可得:

$$\begin{aligned}
 A_1^*(s) &= \frac{\frac{1}{s}(1 - \hat{F}_1(s))}{1 - \hat{F}_1(s)\hat{G}_1(s)\hat{Q}_1(s)} \\
 &= \frac{(s+1)(s+1.5)^2}{s \left[(s+1.05)(s+1.5)^2 - 0.0125 \cdot e^{0.5(s_2 - s_1)} \right]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2^*(s) &= \frac{\frac{1}{s}(1 - \hat{F}_2(s))}{1 - \hat{F}_2(s)\hat{G}_2(s)\hat{Q}_2(s)} \\
 &= \frac{(s+1)(s+1.5)^2}{s[(s+1.1)(s+1.5)^2 - 0.025 \cdot e^{0.5(s_1-s_2)}]}
 \end{aligned}$$

为了计算的简便，假设 $s_1 = s_2$ ，于是 $A_i'(t)$ 的拉普拉斯变换可以简化如下：

$$A_1^*(s) \approx \frac{s+1}{s(s+1.05)} = \frac{20}{s} + \frac{1}{s+1.05}$$

$$A_1^*(s) \approx \frac{s+1}{s(s+1.1)} = \frac{10}{s} + \frac{1}{s+1.1}$$

利用拉普拉斯的逆变换^[155]，可得考虑维修延迟的部件 i 的瞬时可用度：

$$A_1'(t) = \frac{20}{21} + \frac{1}{21} e^{-1.05t} \quad (4-13)$$

$$A_2'(t) = \frac{10}{11} + \frac{1}{11} e^{-1.1t} \quad (4-14)$$

随后即可算出：

$$\int_0^{s_2} A_1'(t-s_1) ds_1 = \frac{20}{21} s_1 + \frac{20}{441} (e^{-1.05s_1} - 1) \quad (4-15)$$

$$\int_0^{s_1} A_2'(t-s_2) ds_2 = \frac{10}{11} s_1 + \frac{10}{121} (e^{-1.1s_1} - 1) \quad (4-16)$$

给定时刻 t ，便可由 $\tilde{A}(t)$ 的显式表达式 (4-12) 得出新系统的瞬时可用度。同时，当时刻 t 趋于无穷时，可以计算系统的稳态可用度：

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= A + \frac{1}{200} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[\frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot e^{-(\lambda_1 + \mu_1)(t-s_1)} \right] (e^{-\mu s_1} - e^{-\mu}) \int_0^{s_1} A_2'(t-s_2) ds_2 ds_1 \\
 &\quad + \frac{1}{200} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[\frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot e^{-(\lambda_2 + \mu_2)(t-s_2)} \right] (e^{-\mu s_2} - e^{-\mu}) \int_0^{s_2} A_1'(t-s_1) ds_1 ds_2 \\
 &\approx 0.972
 \end{aligned} \quad (4-17)$$

从数值算例不难看出，新系统的可用度较原系统更高。从理论推导的角度出发，这个结果可以从式 (4-5) 看出，等式 (4-5) 右边的后两项均是非负的。从工程实际出发，对于可忽略部分失效的系统给出维修时间临界值 τ ，分析实际情况下系统的可用度。

4.3 部分故障影响可忽略或延迟的可修系统可能可靠性分析

本节将基于可能性理论对部分故障可忽略或可延迟的可修系统进行可能可靠性分析。这类系统的特征可以描述如下：

(1) 如果系统故障的维修时间很短（在一个可接受的范围内），不足以对系统的正常工作造成不可接受的影响，这样可以认为系统在维修时间期间也是处于工作状态，即是乐观的对待系统失效，这样的系统称为可忽略失效的可修系统。

(2) 如果系统故障的维修时间长于可接受的范围，而最终影响了系统的正常工作。这样的情况下，仍可以认为系统在开始维修到可接受时间内亦是处于工作状态，称为可延迟失效的可修系统。

基于以上两点对系统的特征描述，将建立相关的可修系统模型，分别假设可接受时间点为常数和/或非负随机变量，基于可能性理论求得可忽略或延迟失效的可修系统的瞬时可能可用度等可靠性指标。

4.3.1 传统可修系统与可忽略或延迟失效的可修系统模型假设

本小节将分别介绍单部件可维修系统的原有模型假设和可忽略或延迟失效的新模型假设，同时对其不同点加以分析。首先介绍原有模型假设^[152,153]：

(1) 系统仅由一个部件组成，具有一个修理设备。系统在初始时刻 $t=0$ 是新的。

(2) 系统有两个可能状态：工作状态，维修状态。当部件发生故障时，修理设备立即对其进行维修，且故障部件可修复如新。

(3) 假设系统寿命 T_s 服从偏小型可能性分布 $\pi_{T_s}(t_s)$ ，部件故障后的维修时间 T_r 服从偏小型可能性分布 $\pi_{T_r}(t_r)$ ，所有变量都是相互独立的。

原系统共有两个不同状态，分别用 0、1 来表示。状态 0 表示系统处于维修状态，状态 1 表示系统处于工作状态，因此，系统的状态空间为 $E = \{0,1\}$ ，工作状态集为 $W = \{1\}$ ，维修状态集为 $F = \{0\}$ 。令 $X(t)$ 表示时刻 t 系统所处的状态，则

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{时刻}t\text{系统处于工作状态} \\ 0, & \text{时刻}t\text{系统处于维修状态} \end{cases}$$

于是， $\{X(t), t \geq 0\}$ 表示系统的运行过程，且是状态空间为 E 的连续时间上的齐次过程。对单部件系统来说，系统状态即是部件状态。在原系统（单部件可维修系统）的基础上，确立一个维修时间的阈值 $\tau(\tau \geq 0)$ ，如果在 τ 时间内完成对故

障的维修，则考虑忽略此次维修对系统工作状态的影响；如果维修时间比 τ 长，则在 $(0, \tau)$ 维修时间间隔内考虑忽略对系统工作的影响，即延迟失效，系统的故障状态从维修时间的阈值 τ 持续到维修结束。由此建立新的模型（可忽略或延迟失效的单部件可修系统），容易得出部分原系统处于故障状态时，新系统仍处于工作状态。对于同样仅由一个部件组成，具有一个修理设备的单部件可修系统，在原系统的基础上定义新系统如下：

(1) 系统在初始时刻 $t = 0$ 是新的。

(2) 系统有两个可能状态：工作状态，维修状态。当部件发生故障时，修理设备立即对其进行维修，且故障部件可修复如新。

(3) 假设系统寿命 T_s 服从偏小型可能性分布 $\pi_{T_s}(u)$ ，部件故障后的维修时间 T_r 服从偏小型可能性分布 $\pi_{T_r}(u)$ ，所有变量都是相互独立的。

(4) 若原系统处于工作状态，则新系统处于工作状态。

(5) 若原系统处于维修状态，且维修时间不超过给定的门限值 τ ，则新系统处于工作状态。

(6) 若原系统处于维修状态，且维修时间大于给定的门限值 τ ，则新系统在 $(0, \tau)$ 维修时间间隔内处于工作状态，在大于 τ 的维修时间内处于维修状态。

(7) $\tau(\tau \geq 0)$ 是给定的某一门限值（临界值、阈值），它可以是常数，也可以是非负随机变量，假设 τ 为非负随机变量时服从概率分布 $H(\tau)$ 。

容易看出，若 $\tau = 0$ ，新系统便与原系统一样；若 $\tau = \infty$ ，新系统便永远不会发生故障处于工作状态。图 4-2 表示原系统和新系统之间可能的一种状态变化。

对于维修时间长于 τ 的维修间隔，图 4-1 中认为新系统处于故障状态，而图 4-2 中认为前 τ 时间内新系统依然处于工作状态。这是由于图 4-1 中反映的新系统仅考虑部分故障可忽略，而图 4-2 中反映的新系统不仅考虑了部分故障可忽略，还考虑了部分故障可延迟，于是才有图中显示的区别。

令 $\tilde{X}(t)$ 表示时刻 t 新系统所处的状态，则

$$\tilde{X}(t) = \begin{cases} 1, & \text{时刻 } t \text{ 新系统处于工作状态} \\ 0, & \text{时刻 } t \text{ 新系统处于维修状态} \end{cases}$$

于是， $\{\tilde{X}(t), t \geq 0\}$ 表示系统的运行过程，可以证明这是一个不具有无记忆性的过程。事实上，给定新系统现在的状态，其未来的发展趋势不是独立于过去的发展状态，而是密切相关的。以维修时间点 $\tau_1 (\tau_1 < \tau)$ 为例，原系统处于维修状态而新系统处于工作状态。同时，新系统的未来状态与其经历了的维修时间有关，即是与过去的发展状态有关，这便体现出过程发展的记忆性。

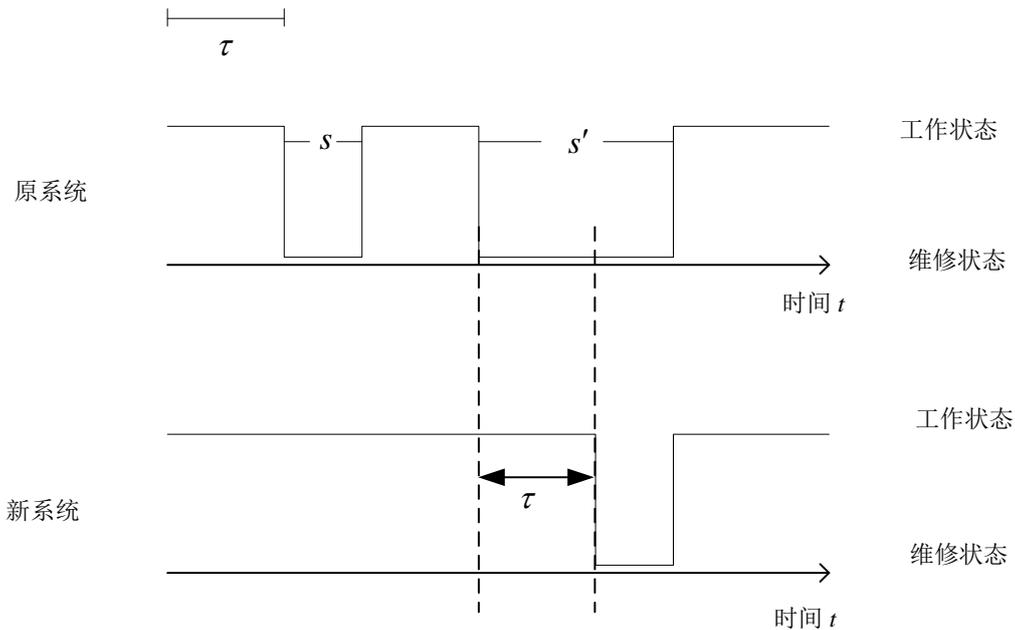


图 4-2 原单部件系统与部分故障可忽略或延迟的新系统之间的比较

4.3.2 部分故障影响可忽略或延迟的可修系统可能可靠性指标分析

本小节将给出新系统的瞬时可能可用度的推导和证明。设 $A_{\Pi}(t)$ 和 $\tilde{A}_{\Pi}(t)$ 分别表示原系统和新系统的瞬时可能可用度，则

$$\begin{aligned} A_{\Pi}(t) &= \Pi(\text{原系统在时刻 } t \text{ 处于工作状态}) \\ &= \Pi\{X(t)=1\} \end{aligned} \quad (4-18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\Pi}(t) &= \Pi(\text{新系统在时刻 } t \text{ 处于工作状态}) \\ &= \Pi\{\tilde{X}(t)=1\} \end{aligned} \quad (4-19)$$

4.3.2.1 节将对原系统的发展进程拆分成多个阶段进行分析，进而对原系统可能可用度 $A_{\Pi}(t)$ 的数学表达式进行推导。接下来 4.3.2.2 节将分析原系统和新系统可能可用度之间的关系，并在 4.3.2.1 节的理论上推导新系统可能可用度 $\tilde{A}_{\Pi}(t)$ 的表达式。

4.3.2.1 原系统可能可用度 $A_{\Pi}(t)$ 的数学表达式推导

原系统可能可用度定义为原系统在时刻 t 处于工作状态的可能性（如式 (4-18) 所示），原系统状态随时间的发展进程如图 4-3 所示，其中 T_{s_i} 表示第 i 阶段的系统寿命时间， T_{r_i} 表示第 i 阶段的系统维修时间，记 $Z_i = T_{s_i} + T_{r_i}$ ，则 $\{Z_i, i=1, 2, \dots\}$ 是一列独立同分布的变量。由故障部件可修复如新的假设可以得到，图 4-3 中的

Z_1, Z_2, \dots 均为更新点。容易看出, 若时刻 t 处于 T_{s_i} 阶段, 则原系统在时刻 t 处于工作状态。

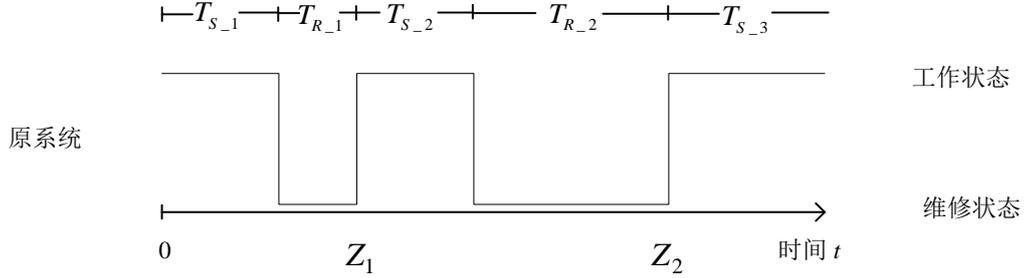


图 4-3 原单部件系统状态的发展进程

于是, 事件 $X(t)=1$ (原系统在时刻 t 处于工作状态) 可以由如下一系列事件的并来表达:

$$\begin{aligned} \{X(t)=1\} = & \{T_{s_{-1}} > t\} \cup \{Z_1 < t < Z_1 + T_{s_{-2}}\} \cup \{Z_1 + Z_2 < t < Z_1 + Z_2 + T_{s_{-3}}\} \\ & \cup \dots \cup \left\{ \sum_{j=1}^i Z_j < t < \sum_{j=1}^i Z_j + T_{s_{-i+1}} \right\} \cup \dots \end{aligned} \quad (4-20)$$

上式可以进一步简化如下:

$$\{T_{s_{-1}} > t\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^i Z_j < t < \sum_{j=1}^i Z_j + T_{s_{-i+1}} \right\} \quad (4-21)$$

故而从数值上, 原系统的瞬时可能可用度即可由式 (4-21) 表达的事件发生的可能性得到。根据 $\{Z_i, i=1,2,\dots\}$ 各点的无记忆性, 以及 Dubois 和 Prade 博士^[156] 对事件条件可能性的定义 ($\Pi(A \cap B) = \Pi(A|B) * \Pi(B)$), 令 $*$ = min, 则有:

$$\begin{aligned} \Pi(Z_1 < t < Z_1 + T_{s_{-2}}) &= \Pi(T_{s_{-2}} > t - Z_1, 0 < Z_1 < t) \\ &= \min \left\{ \Pi(T_{s_{-2}} > t - Z_1 | 0 < Z_1 < t), \Pi(0 < Z_1 < t) \right\} \\ &= \min \left\{ \sup_{u \in (0,t)} \Pi(T_{s_{-2}} > t - Z_1 | Z_1 = u), \sup_{u \in (0,t)} \Pi(Z_1 = u) \right\} \\ &= \min \left\{ \sup_{u \in (0,t)} \Pi(T_{s_{-2}} > t - u), \sup_{u \in (0,t)} \Pi(Z_1 = u) \right\} \end{aligned} \quad (4-22)$$

类似地, 可以得到:

$$\begin{aligned} \Pi(Z_1 + Z_2 < t < Z_1 + Z_2 + T_{s_{-3}}) &= \Pi(T_{s_{-3}} > t - Z_1 - Z_2, 0 < Z_1 + Z_2 < t) \\ &= \min \left\{ \Pi(T_{s_{-3}} > t - Z_1 - Z_2 | 0 < Z_1 + Z_2 < t), \Pi(0 < Z_1 + Z_2 < t) \right\} \\ &= \min \left\{ \sup_{u \in (Z_1,t)} \Pi(T_{s_{-3}} > t - u), \sup_{u \in (Z_1,t)} \Pi(Z_1 + Z_2 = u) \right\} \end{aligned}$$

(4-23)

$$\begin{aligned} \Pi\left(\sum_{j=1}^i Z_j < t < \sum_{j=1}^i Z_j + T_{S_{-i+1}}\right) &= \Pi\left(T_{S_{-i+1}} > t - \sum_{j=1}^i Z_j, \sum_{j=1}^{i-1} Z_j < \sum_{j=1}^i Z_j < t\right) \\ &= \min \left\{ \sup_{u \in \left(\sum_{j=1}^{i-1} Z_j, t\right)} \Pi\left(T_{S_{-i+1}} > t - u\right), \sup_{u \in \left(\sum_{j=1}^{i-1} Z_j, t\right)} \Pi\left(\sum_{j=1}^i Z_j = u\right) \right\} \end{aligned} \quad (4-24)$$

由可能性测度的性质，可以比较式（4-22）-式（4-24）中最后一个表达式的大小。观察式（4-22）和式（4-23）最后一项的区别，可以发现式（4-23）中变量 u 的取值范围较式（4-22）中更小，根据 $\{T_{S_{-i}}, i=1,2,\dots\}$ 同分布的性质，从而能够推出如下序列呈递减趋势：

$$\Pi(Z_1 < t < Z_1 + T_{S_{-2}}), \Pi(Z_1 + Z_2 < t < Z_1 + Z_2 + T_{S_{-3}}), \dots, \Pi\left(\sum_{j=1}^i Z_j < t < \sum_{j=1}^i Z_j + T_{S_{-i+1}}\right)$$

于是，原系统可能可用度的表达式可以作如下转化：

$$\begin{aligned} A_{\Pi}(t) &= \Pi\{X(t) = 1\} \\ &= \Pi\left\{\{T_{S_{-1}} > t\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^i Z_j < t < \sum_{j=1}^i Z_j + T_{S_{-i+1}}\right)\right\} \\ &= \Pi(T_{S_{-1}} > t) \vee \Pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^i Z_j < t < \sum_{j=1}^i Z_j + T_{S_{-i+1}}\right)\right\} \\ &= \Pi(T_{S_{-1}} > t) \vee \Pi(Z_1 < t < Z_1 + T_{S_{-2}}) \\ &= \Pi(T_{S_{-1}} > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in (0,t)} \left[\Pi(T_{S_{-2}} > t - u), \Pi(Z_1 = u) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4-25)$$

由式（4-25）可以看出，给定变量的可能性分布，原系统的瞬时可能可用度即可得到。

同时，假定 $Z_0 = 0$ ，事件 $X(t) = 0$ （原系统在时刻 t 处于维修状态）类似可以由一系列事件的并来表达：

$$\begin{aligned}
 \{X(t)=0\} &= \{T_{S_{-1}} \leq t \leq Z\} \cup \{Z + T_{S_{-2}} \leq t \leq Z + Z_1\} \cup \dots \\
 &\cup \left\{ \sum_{j=1}^i Z_j + T_{S_{-i+1}} \leq t \leq \sum_{j=1}^{i+1} Z_j \right\} \cup \dots \\
 &= \bigcup_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^i (Z_j + T_{S_{-j+1}}) \leq t \leq \sum_{j=0}^i Z_{j+1} \right]
 \end{aligned} \quad (4-26)$$

式(4-26)中所描述的事件即时刻 t 处于各个 T_{R_i} 阶段的事件并($i=1,2,\dots$), 其中, 将时刻 t 分别处于前三个 T_{R_i} 阶段的可能性转化如下:

$$\Pi(T_{S_{-1}} \leq t \leq Z) = \Pi(T_{S_{-1}} \leq t, Z \geq t) \quad (4-27)$$

$$\Pi(Z_1 + T_{S_{-2}} \leq t \leq Z + Z_1) = \Pi(T_{S_{-2}} \leq t - Z, Z_1 \geq t - Z) \quad (4-28)$$

$$\begin{aligned}
 &0 \\
 &\Pi \left(\sum_{j=1}^i Z_j + T_{S_{-i+1}} \leq t \leq \sum_{j=1}^{i+1} Z_j \right) = \Pi \left(T_{S_{-i+1}} \leq t - \sum_{j=1}^i Z_j, Z_{i+1} \geq t - \sum_{j=1}^i Z_j \right)
 \end{aligned} \quad (4-29)$$

由于 $\{T_{S_{-i}}, i=1,2,\dots\}$ 和 $\{Z_i, i=1,2,\dots\}$ 分别是独立同分布的变量序列, 根据式(4-27) - 式(4-29) 可以推出序列 $\Pi(T_{S_{-1}} \leq t \leq Z_1)$, $\Pi(Z_1 + T_{S_{-2}} \leq t \leq Z_1 + Z_2), \dots$ 呈递减趋势。于是, 可以得到与式(4-25) 平行的结论:

$$\begin{aligned}
 &\Pi\{X(t)=0\} \\
 &= \Pi \left\{ \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i (Z_j + T_{S_{-j+1}}) \leq t \leq \sum_{j=0}^i Z_{j+1} \right) \right\} \\
 &= \Pi \left\{ \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^i Z_j \leq t \leq \sum_{j=1}^i Z_j + T_{S_{-i+1}} \right) \right\} \\
 &= \Pi(T_{S_{-1}} \leq t \leq Z_1) \\
 &= \Pi(T_{S_{-1}} \leq t, Z_1 \geq t)
 \end{aligned} \quad (4-30)$$

按 3.2.2 节中所描述, 可能性测度不具有概率测度的有限可加性, 其对应的性质反应出事件发生的可能性等于构成该事件的各个事件发生可能性的最大值^[157]。结合可能性测度的正规性, 可以得到关于 $\Pi\{X(t)=0\}$ 和 $\Pi\{X(t)=1\}$ 的一些有趣的性质。由于系统要么处于工作状态, 要么处于维修状态, 所以事件 $\{X(t)=0\}$ 和事件 $\{X(t)=1\}$ 并起来即构成整个域, 于是有:

$$\Pi\{X(t)=0\} \vee \Pi\{X(t)=1\} = \Pi\{(X(t)=0) \cup (X(t)=1)\} = 1$$

也就是说, 给定某一时刻 t , $\Pi\{X(t)=0\}$ 和 $\Pi\{X(t)=1\}$ 中至少有一个取值为 1。更具体地表达, 如果原系统在时刻 t 的可能可用度不为 1, 则该系统在时刻

t 处于维修状态的可能性等于 1；反之，如果原系统在时刻 t 处于维修状态的可能性不为 1，则该系统在时刻 t 的可能可用度等于 1。

4.3.2.2 新系统可能可用度 $\tilde{A}_\Pi(t)$ 的数学表达式推导

根据 4.3.1 节中“若原系统处于工作状态，则新系统处于工作状态”的假设，新系统的瞬时可能可用度可以推导如下：

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_\Pi(t) &= \Pi(\text{the new system is operating}) \\
 &= \Pi\{\tilde{X}(t)=1\} \\
 &= \Pi\left\{\left[\tilde{X}(t)=1, X(t)=0\right] \vee \left[\tilde{X}(t)=1, X(t)=1\right]\right\} \\
 &= \Pi\left\{\left[\tilde{X}(t)=1, X(t)=0\right] \vee [X(t)=1]\right\} \\
 &= \Pi(\tilde{X}(t)=1, X(t)=0) \vee \Pi(X(t)=1) \\
 &= \Pi(\tilde{X}(t)=1, X(t)=0) \vee A_\Pi(t)
 \end{aligned} \tag{4-31}$$

由式 (4-31)，只需求出 $\Pi(\tilde{X}(t)=1, X(t)=0)$ 便可推导出新系统可能可用度 $\tilde{A}_\Pi(t)$ 的数学表达式。 $\Pi(\tilde{X}(t)=1, X(t)=0)$ 表示时刻 t 原系统处于维修状态而新系统处于工作状态的可能性。基于 4.3.1 节中的模型假设，原系统处于维修状态而新系统处于工作状态这一事件须分为两部分来分析：

(1) 原系统在时刻 t 处于维修状态，且维修时间不超过给定门限值 τ 。

(2) 原系统在时刻 t 处于维修状态且维修所需时间较给定的门限值 τ 更长，但直至时刻 t ，维修时间不超过门限值 τ 。

接下来，将分别以门限值 τ 取非负常数和取非负随机变量两种情况对新系统可能可用度进行分析。

(1) τ 取非负常数

假设取定维修时间门限值 τ 为一非负常数，显然可以比较给定时刻 t 与该门限值 τ 之间的大小关系。

当 $t \leq \tau$ 时，易得：

$$\Pi(\tilde{X}(t)=1, X(t)=0) = \Pi(X(t)=0)$$

当 $t > \tau$ 时，结合图 4-4 中对原系统处于维修状态而新系统处于工作状态两种情形的直观描述，可以得到：

$$\begin{aligned} & \Pi(\tilde{X}(t)=1, X(t)=0) \\ &= \min \left\{ 1, \int_0^\tau A_{\Pi}(t-s) \cdot w_{10}(t) \cdot [\Pi(s < T_R < \tau) \vee \Pi(s < T_R, T_R \geq \tau)] ds \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \int_0^\tau A_{\Pi}(t-s) \cdot w_{10}(t) \cdot \Pi(s < T_R) ds \right\} \end{aligned}$$

其中， $w_{10}(t)$ 表示时刻 t 原系统从状态 1 转移到状态 0 的隶属函数。

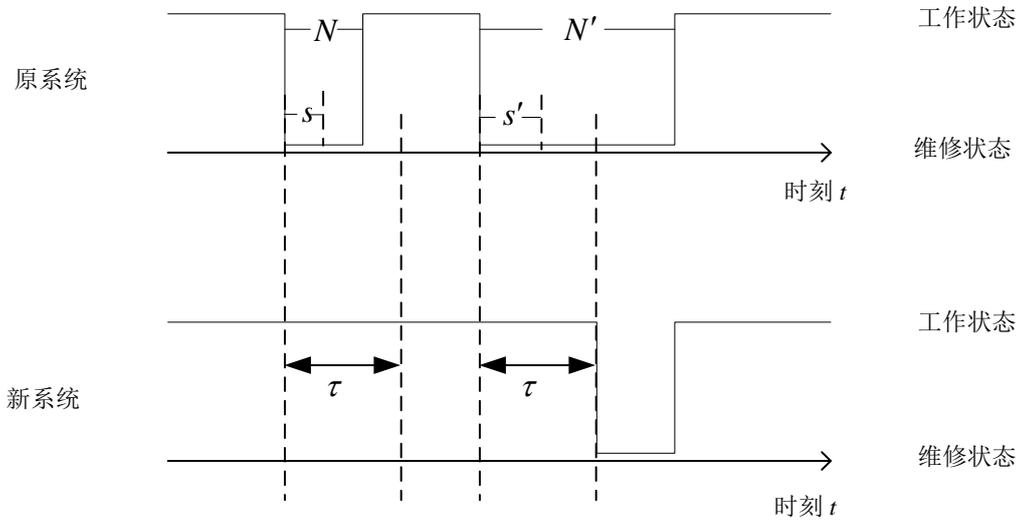


图 4-4 时刻 t 原系统处于维修状态而新系统处于工作状态的情形

综上，当维修时间门限值 τ 取非负常数时，可以推出新系统瞬时可能可用度的表达式如下：

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\Pi}(t) &= \Pi(\tilde{X}(t)=1, X(t)=0) \vee A_{\Pi}(t) \\ &= \begin{cases} \Pi(X(t)=0) \vee A_{\Pi}(t) & t \leq \tau \\ A_{\Pi}(t) \vee \int_0^\tau A_{\Pi}(t-s) \cdot w_{10}(t) \cdot \Pi(s < N) ds & t > \tau \end{cases} \quad (4-32) \end{aligned}$$

(2) τ 取非负随机变量

假设维修时间门限值 τ 为服从概率分布 $H(\tau)$ 的随机变量，易得：

$$\begin{aligned}
 \Pi(\tilde{X}(t)=1, X(t)=0) &= \int_0^\infty \int_0^{\min(t,\tau)} A(t-s)w_{10} \cdot [\Pi(s < T_R < \tau) \vee \Pi(s < T_R, T_R \geq \tau)] ds dH(\tau) \\
 &= \int_t^\infty \Pi(X(t)=0) dH(\tau) + \int_0^t \int_0^\tau A_\Pi(t-s) \cdot w_{10}(t) \cdot \Pi(s < T_R) ds dH(\tau) \\
 &= \Pi(X(t)=0) \bar{H}_\tau(t) + \int_0^t \int_0^\tau A_\Pi(t-s) \cdot w_{10}(t) \cdot \Pi(s < T_R) ds dH(\tau)
 \end{aligned} \tag{4-33}$$

其中，最后一个等式是由

$$\int_t^\infty dH(\tau) = P(\tau \geq t) = 1 - H_\tau(t) = \bar{H}_\tau(t)$$

得到的。同样，可以根据

$$\tilde{A}_\Pi(t) = \Pi(\tilde{X}(t)=1, X(t)=0) \vee A_\Pi(t)$$

和式(4-25)中对 $A_\Pi(t)$ 的描述给出新系统可能可用度 $\tilde{A}_\Pi(t)$ 的数学表达式。此处是简单的代入，不再冗述。

4.3.3 数值算例

本节将以数值算例来比较原系统和新系统的瞬时可能可靠性指标。基于维修部件可修复如新的假设， $\{T_{s_i}, i=1,2,\dots\}$ 和 $\{T_{R_i}, i=1,2,\dots\}$ 分别是独立同分布的变量序列。可以用 T_s 记 $\{T_{s_i}, i=1,2,\dots\}$ 中的任一变量，以 T_R 记 $\{T_{R_i}, i=1,2,\dots\}$ 中的任一变量。同样地，假设 $Z = T_s + T_R$ ，则 Z 表示 $\{Z_i, i=1,2,\dots\}$ 中的任一变量。

假设系统寿命时间 T_s 服从参数为 $t_1 = 100\text{day}$ 的偏小型可能性分布 $\pi_{T_s}(t_s)$ ，部件故障后的维修时间 T_R 服从参数为 $t_2 = 1\text{day}$ 的偏小型可能性分布 $\pi_{T_R}(t_R)$ ：

$$\pi_{T_s}(t_s) = \begin{cases} 1 & t_s \leq t_1 \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t_s - t_1}{t_1}\right)\right\} & t_s > t_1 \end{cases} \tag{4-34}$$

$$\pi_{T_R}(t_R) = \begin{cases} 1 & t_R \leq t_2 \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t_R - t_2}{t_2}\right)\right\} & t_R > t_2 \end{cases} \tag{4-35}$$

由式 (4-35) 和式 (4-36), t_1 是系统寿命时间变量 T_S 的可能性分布对应的最大可能的系统寿命值, t_2 是系统维修时间变量 T_R 的可能性分布对应的最大可能的维修时间。根据变量 T_S 和 T_R 之间的独立性和联合可能性分布的性质, 可以得到变量 Z 的可能性分布如下:

$$\begin{aligned}\pi_Z(z) &= \pi_{T_S+T_R}(z) = \bigvee_{t_S+t_R=z} \pi_{(T_S, T_R)}(t_S, t_R) \\ &= \bigvee_{t_S+t_R=z} \left[\min(\pi_{T_S}(t_S), \pi_{T_R}(t_R)) \right]\end{aligned}\quad (4-36)$$

下面详细给出原系统瞬时可能可用度 $A_{\Pi}(t)$ 的计算过程。

对于式 (4-25) 中所表达的原系统可能可用度, 对时刻 t 分四个阶段进行讨论:

(1) 若 $t \in [0, t_1]$, 由式 (4-25) 最后一个等式易得:

$$\Pi(T_S > t) = \Pi(T_S = t_1) = 1$$

于是, $A_{\Pi}(t) = 1$ 。

(2) 若 $t \in (t_1, t_1 + t_2]$, 由 $u \in (0, t)$ 可以推出 u 的取值范围 $u \in (0, t_1 + t_2)$ 。同时, 条件 $t_S < t_1$ 可以推得 $\pi_{T_S}(t_S) = 1$; 条件 $t_R < t_2$ 可以推得 $\pi_{T_R}(t_R) = 1$ 。于是有:

$$\begin{aligned}A_{\Pi}(t) &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in (0, t)} \left[\Pi(T_S > t - u), \Pi(Z = u) \right] \right\} \\ &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{\substack{u \in (0, t) \\ t \in (t_1, t_1 + t_2]}} \left[\Pi(T_S > t - u), \bigvee_{t_S+t_R=u} \left[\min(\pi_{T_S}(t_S), \pi_{T_R}(t_R)) \right] \right] \right\} \\ &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{\substack{u \in (0, t) \\ t \in (t_1, t_1 + t_2]}} \left[\Pi(T_S > t - u), \bigvee_{t_S < t_1, t_R < t_2} \left[\min(\pi_{T_S}(t_S), \pi_{T_R}(t_R)) \right] \right] \right\} \\ &= \Pi(T_S > t) \vee \sup_{\substack{u \in (0, t) \\ t \in (t_1, t_1 + t_2]}} \left[\Pi(T_S > t - u) \right] \\ &= \sup_{\substack{u \in (0, t) \\ t \in (t_1, t_1 + t_2]}} \left[\Pi(T_S > t - u) \right] \\ &= 1\end{aligned}\quad (4-37)$$

事实上, 式 (4-37) 中最后一个等式的得到是由于当 u 和 t 的取值满足条件 $t - u \leq t_1$ 时, 系统在时刻 t ($t \in (t_1, t_1 + t_2]$) 的可能可用度为 1。

(3) 若 $t \in (t_1 + t_2, 2t_1 + t_2]$, 需对 u 的取值分两部分讨论:

i) 当 $u \in (0, t_1 + t_2)$ 时,

$$\begin{aligned}
 A_{\Pi}(t) &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in (0, t_1 + t_2)} \left[\Pi(T_S > t - u), \bigvee_{t_S < t_1, t_R < t_2} \left[\min(\pi_{T_S}(t_S), \pi_{T_R}(t_R)) \right] \right] \right\} \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \sup_{u \in (0, t_1 + t_2)} \left[\Pi(T_S > t - u) \right] \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \Pi(T_S > t - t_1 - t_2) \\
 &= \Pi(T_S > t - t_1 - t_2) \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{4-38}$$

式(4-38)中最后一个等式是由于时刻 t 的上界被限制在 $2t_1 + t_2$ ，否则，等式 $\Pi(T_S > t - t_1 - t_2) = 1$ 是不成立的。

ii) 当 $u \in [t_1 + t_2, t)$ 时，

a) 如果 $t_S \leq t_1, t_R \geq t_2$ ，则有 $\pi_{T_S}(t_S) = 1$ 和 $\pi_{T_R}(t_R) = 1$ 成立，同时显然可以得到 $\min(\pi_{T_S}(t_S), \pi_{T_R}(t_R)) = \pi_{T_R}(t_R)$ 。于是有：

$$\begin{aligned}
 A_{\Pi}(t) &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in [t_1 + t_2, t)} \left[\Pi(T_S > t - u), \Pi(Z = u) \right] \right\} \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in [t_1 + t_2, t)} \left[\Pi(T_S > t - u), \bigvee_{t_S \leq t_1, t_R \geq t_2} \left[\min(\pi_{T_S}(t_S), \pi_{T_R}(t_R)) \right] \right] \right\} \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in [t_1 + t_2, t)} \left[\Pi(T_S > t - u), (\pi_{T_R}(u - t_1)) \right] \right\} \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \min_{u = t_1 + t_2} \left[\Pi(T_S > t - u), (\pi_{T_R}(u - t_1)) \right] \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee 1 \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{4-39}$$

b) 如果 $t_R \leq t_2, t_S \geq t_1$ ，依据式(4-38)类似可以得到：

$$\begin{aligned}
 A_{\Pi}(t) &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in [t_1 + t_2, t)} \left[\Pi(T_S > t - u), \bigvee_{t_S \geq t_1, t_R \leq t_2} \left[\min(\pi_{T_S}(t_S), \pi_{T_R}(t_R)) \right] \right] \right\} \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \min_{u = t_1 + t_2} \left[\Pi(T_S > t - u), (\pi_{T_S}(u - t_2)) \right] \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee 1 \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{4-40}$$

(4) 若 $t \in (2t_1 + t_2, \infty)$ ，与(3)中对 $t \in (t_1 + t_2, 2t_1 + t_2]$ 的讨论类似，同样需对 u 的取值分两部分讨论：

i) 当 $u \in (0, t_1 + t_2)$ 时,

$$\begin{aligned}
 A_{\Pi}(t) &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in (0, t_1 + t_2)} \left[\Pi(T_S > t - u), \bigvee_{t_S < t_1, t_R < t_2} \left[\min(\pi_{T_S}(t_S), \pi_{T_R}(t_R)) \right] \right] \right\} \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \sup_{u \in (0, t_1 + t_2)} \left[\Pi(T_S > t - u) \right] \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \Pi(T_S > t - t_1 - t_2) \\
 &= \Pi(T_S > t - t_1 - t_2)
 \end{aligned} \tag{4-41}$$

ii) 当 $u \in [t_1 + t_2, t)$ 时,

a) 如果 $t_S \leq t_1, t_R \geq t_2$, 则有:

$$\begin{aligned}
 A_{\Pi}(t) &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in [t_1 + t_2, t)} \left[\Pi(T_S > t - u), (\pi_{T_R}(u - t_1)) \right] \right\} \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \min_{u = t - t_1} \left[\Pi(T_S > t - u), (\pi_{T_R}(u - t_1)) \right] \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \Pi(T_R > t - 2t_1)
 \end{aligned} \tag{4-42}$$

b) 如果 $t_R \leq t_2, t_S \geq t_1$, 则有:

$$\begin{aligned}
 A_{\Pi}(t) &= \Pi(T_S > t) \vee \min \left\{ \sup_{u \in [t_1 + t_2, t)} \left[\Pi(T_S > t - u), (\pi_{T_S}(u - t_2)) \right] \right\} \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \min_{u = \frac{t + t_2}{2}} \left[\Pi(T_S > t - u), (\pi_{T_S}(u - t_2)) \right] \\
 &= \Pi(T_S > t) \vee \Pi\left(T_S > \frac{t - t_2}{2}\right) \\
 &= \Pi\left(T_S > \frac{t - t_2}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-43}$$

综上, 当 $t \in [0, 2t_1 + t_2]$ 时, $A_{\Pi}(t) = 1$; 当 $t \in (2t_1 + t_2, \infty)$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
 A_{\Pi}(t) &= \Pi(T_S > t - t_1 - t_2) \vee \Pi(T_S > t) \vee \Pi(T_R > t - t_2) \vee \Pi\left(T_S > \frac{t - t_2}{2}\right) \\
 &= \Pi(T_R > t - 2t_1) \vee \Pi\left(T_S > \frac{t - t_2}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-44}$$

结合式 (4-34) 和式 (4-35), 上式可以进一步简化如下:

$$\begin{aligned}
A_{\Pi}(t) &= \Pi(T_R > t - 2t_1) \vee \Pi\left(T_S > \frac{t - t_2}{2}\right) \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - 2t_1 - t_2}{t_2}\right)\right\} \vee \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - 2t_1 - t_2}{2t_1}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - 2t_1 - t_2}{2t_1}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{4-45}$$

式(4-45)中最后一个等式是由 $t_1 > t_2$ 得到的。

综上所述,数值算例中原系统的瞬时可能可用度可以表达如下:

$$\begin{aligned}
A_{\Pi}(t) &= \begin{cases} 1 & t \in [0, 2t_1 + t_2] \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - 2t_1 - t_2}{2t_1}\right)\right\} & t \in (2t_1 + t_2, \infty) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & t \in [0, 201] \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - 201}{200}\right)\right\} & t \in (201, \infty) \end{cases}
\end{aligned} \tag{4-46}$$

至此,结束了对原系统瞬时可能可靠度的计算。

在本节的数值算例中,取定维修门限值 τ 为2day,同时假定状态转移隶属函数是由式(4-47)表达的偏大型隶属函数,即:

$$w_{10}(t) = \begin{cases} 0.15 & t \in [0, 2t_1 + t_2] \\ 0.85 & t \in (2t_1 + t_2, \infty) \\ 1 & t = \infty \end{cases} \tag{4-47}$$

实际上,由式(4-46)可以看出,当 $t \in [0, 2t_1 + t_2]$ 时系统处于工作状态的可能性为1,也就是说在这一时间间隔之内系统从工作状态转移到维修状态的可能性很小;当 $t \in (2t_1 + t_2, \infty)$ 时系统的可能可用度在下降,此时系统发生状态转移的可能性则较大。

由4.3.2.2节中对取定维修门限值 τ 为非负常数时新系统瞬时可能可靠性指标的推导式(4-32),可以得到如下的结果:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{\Pi}(t) &= \begin{cases} 1 & t \leq 2(\text{day}) \\ A_{\Pi}(t) \vee \min \left\{ 1, \int_0^2 A_{\Pi}(t-s) \cdot w_{10}(t) \cdot \Pi(s < N) ds \right\} & t > 2(\text{day}) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 & t \leq 201\text{day} \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t-201}{200} \right) \right\} \vee \min \left\{ 1, 0.85 \int_0^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t-201-s}{200} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(s-1) \right\} ds \right\} & t > 201\text{day} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 & t \leq 201\text{day} \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t-201}{200} \right) \right\} \vee \min \left\{ 1, 0.85 \cdot \exp \left\{ -\frac{t-401}{400} \right\} \cdot \int_0^2 \exp \left\{ -\frac{199}{400} s \right\} ds \right\} & t > 201\text{day} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 & t \leq 201\text{day} \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t-201}{200} \right) \right\} \vee \min \left\{ 1, 1.0139 \cdot \exp \left\{ -\frac{t-401}{400} \right\} \right\} & t > 201\text{day} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4-48}$$

根据原系统和新系统可能可用度的计算式 (4-46) 和式 (4-48)，两个系统的可能可用度随时间的变化如图 4-5 所示。

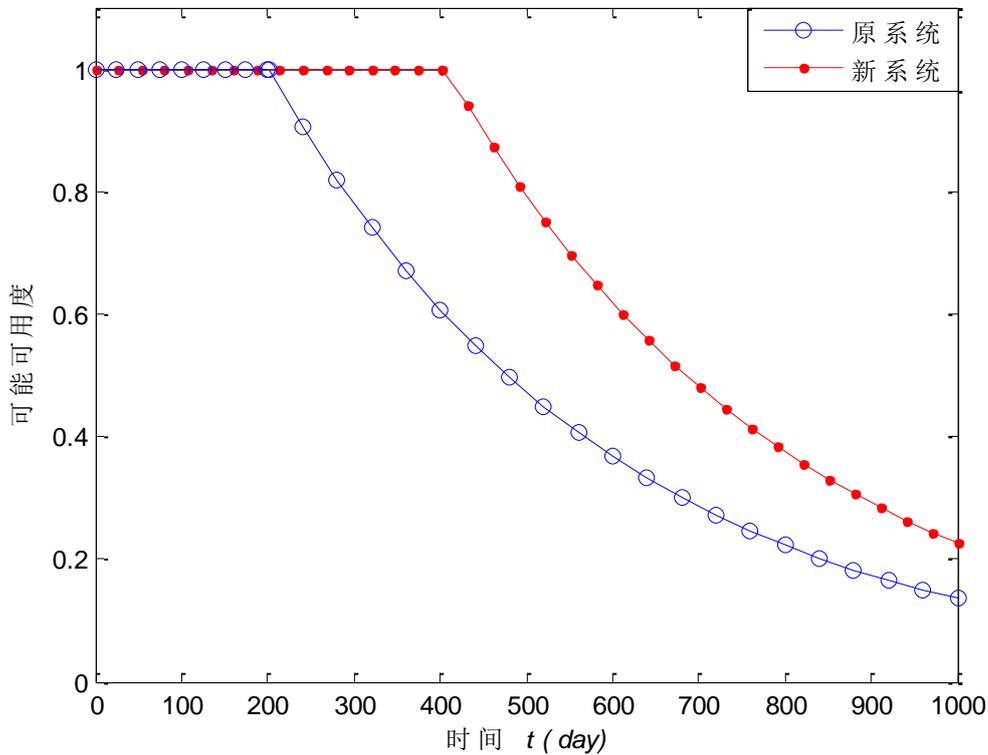


图 4-5 原系统与新系统可能可用度的比较

通过图 4-5 可以直观地观察到新系统的可能可用度较原系统的可能可用度更

高，这是由于新系统中忽略或延迟了部分失效，从而放宽了对系统可能可用度的要求，得到与原系统相比更高的可能可用度数值。同时看到当 $t \leq 2t_1 + t_2$ 时，新系统处于工作状态的可能性为 1，也就是说，在 $t \in [0, 2t_1 + t_2]$ 的时间间隔内，新系统完全具备一直处于工作状态的能力。

4.4 本章小结

本章基于系统维修中可能涉及的实际情况，分别介绍了部分故障可忽略的两部件并联可修系统和部分故障可忽略或延迟的单部件可修系统模型。

对于部分故障可忽略的两部件并联可修马尔可夫系统，假设小于维修时间门限值的维修不影响系统工作，利用概率论和可靠性理论分析系统的瞬时可用度，并以数值算例比较原系统和新系统的差异。

对于部分故障可忽略或延迟的单部件可修系统，给定维修时间的门限值，如果故障的维修时间短于该门限值，则称此次维修不影响系统的正常工作，即可忽略失效；如果故障的维修时间长于该门限值，则认为系统从开始维修到达到维修门限值的时间区间内处于工作状态，从在维修时间大于门限值后才处于维修状态，即延迟失效。由于认知不确定性在实际工程中的大量存在，在可能性理论的基础上讨论了可忽略或延迟失效的单部件可修系统的可能可用度。

本章仅仅从理论上以简单的结构系统为对象进行讨论，今后的工作将围绕实际工程需要的系统模型和其他的可靠性指标来开展。

第五章 多状态系统在完备格框架下的可靠性分析

5.1 引言

单调关联系统中任意一个部件失效不会使系统可靠性得到改善，同时单调关联系统中不存在对其可靠性不起作用的部件。从 20 世纪 50 年代末，许多作者对两状态单调关联系统进行详细研究，这方面的重要结果总结在 Barlow 和 Proschan 的著作^[158,159]中。但实际情况中，两状态的假设不适用于对复杂系统和部件的状态进行描述，因此有关专家学者开展了对多状态系统理论的研究^[85-102]。

多状态可靠性理论中的大多数工作都假设系统和部件的状态集是全序集，即系统（部件）的各个状态能够依照其相应的功能水平的下降排成一个序列。这一假设能够描述一些系统和部件的状态特征，而对于一些存在多种失效类型的系统和部件，不同的失效类型可能会使系统（部件）状态之间无法排序，此时全序集便无法描述系统状态的这一不可比性。以图 5-1 所示的音响系统结构为例^[160]。一个音响系统可以看做是由三个子系统串联而成的：子系统 1 和子系统 3 是并联结构，子系统 2 是单部件结构。系统的失效定义为音响装置无法流畅的通过信号来源发出声响。一个扬声器失效、无线电信号不稳定或 CD 播放器故障等等都会导致系统功能水平的下降。若扬声器 A 和 B 都发生故障（子系统 3），则系统故障；若功放发生故障（子系统 2），则系统故障；若调谐器、CD 播放器和卡式磁带同时出现故障（子系统 1），则系统故障。分别考察扬声器 A 发生故障，其他部件均完好时的系统；CD 播放器发生故障，其他部件均完好时的系统，两种系统相对于完好的系统均有所劣化，但由于故障类型的不同，故障类型的无法比较，难以比较这两种系统的优劣。

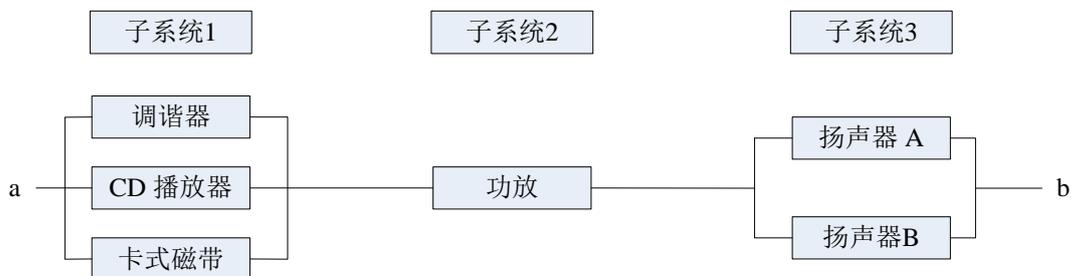


图 5-1 音响系统的结构框图

由于系统（部件）状态之间可能存在的不可比性导致全序集对实际系统状态集无法进行完善的描述，Yu 等^[99]假设系统（部件）状态集为偏序集，给出一般多状态单调关联系统的定义，并对其结构性质和随机性质进行分析。本章采用 Yu 的研究思路，将系统状态集以门限状态集为界划分为两部分，以单部件系统、串联系统、并联系统和表决系统等几类典型系统为对象，对完备格框架下的多状态系统分别基于概率论和可能性理论进行可靠性分析，得出系统可靠性和系统可能可靠性的表达式。与文献[99]的不同之处在于对系统（部件）状态集的假设：文献[99]中假设系统（部件）的状态在偏序集中取值，本章中假设系统（部件）状态集为完备格。

本章的结构安排如下：

5.2 节将介绍完备格的定义和性质并在此基础上阐述以完备格描述系统（部件）状态集的必要性；5.3 节将用最小路集和最小割集对状态集为完备格的系统进行描述；5.4 节将对完备格描述系统状态集的单部件、串联、并联和表决系统，分别基于概率论和可能性理论开展系统可靠性分析和系统可能可靠性分析；5.5 节以分布式处理系统为例，给出部件和系统状态集均以完备格进行描述的系统假设，在系统状态结构函数的基础上对系统可能可靠性进行界定。

5.2 完备格的定义和性质

第二章中定义 2-7 已经给出完备格的定义，任意非空子集都有上确界和下确界的格称为完备格。下面介绍完备格的一些基本性质^[121]。

定义 5-1 设 S 是完备格 (L, \leq) 的子格，若对 S 的每一个非空子集 T 都有 $\vee T \in S, \wedge T \in S$ ，则称 S 是 L 的闭子格。

显然有，一个完备格的非空闭子格作为子偏序集仍是一个完备格。并且，一个格不一定是完备格，完备格的子格也不一定是闭子格。

下面介绍集合上的闭包运算。

定义 5-2 闭包运算定义在集合 P 上的子集 X 上的算子： $X \rightarrow \bar{X}$ ，且满足：

- (1) 递增： $\bar{X} \geq X$ ；
- (2) 幂等： $\overline{\bar{X}} = \bar{X}$ ；
- (3) 单调：若 $X \geq Y$ ，则 $\bar{X} \geq \bar{Y}$ 。

在此闭包运算下，若有 $X = \bar{X}$ ，则称 X 是闭集。

定理 5-1 在给定闭包运算下，全体闭子集对于集合包含关系成为一个完备格，

其下确界即是集合的交。

定理 5-2 设 P 是有泛界 I (单位元) 的偏序集, 且 P 的任意非空子集有下确界, 则 P 是完备格。

推论 5-1 设 P 是有泛界 O (零元) 的偏序集, 且 P 的任意非空子集有上确界, 则 P 是完备格。

定理 5-3 设 (L, \leq) 是完备格, S 是 L 的非空子集, 且对任意 $X \subseteq S$, X 在 L 内的下确界 (上确界) 属于 S , 则 S 是完备格。

定义 5-3 设 A 是偏序集 (P, \leq) 的一个子集, 若 A 在 P 内至少有一个上界和一个下界, 则称 A 是 P 的一个有界子集。

定义 5-4 格叫做一个条件备格, 如果它的每一个非空有界子集都有上确界和下确界。

易知, 完备格一定是条件备格, 而反之不成立。由条件备格的定义, 可以得到如下的一些简单性质:

- (1) 非空条件备格的任意非空有界子集有下确界;
- (2) 非空条件备格的任意非空有界子集有上确界。

事实上, 条件备格与备格的唯一差别就在于它们泛界的存在性。

定理 5-4 设 P 是偏序集, 且满足任意非空有下界的子集一定有下确界, 则在 P 中添加泛界 O, I 可得完备格 \bar{P} 。

推论 5-2 设 L 是有泛界 I, O 的格, 则 L 是完备格 $\Leftrightarrow L$ 是条件备格。

实际上, 一个完备格去掉泛界 I, O 以后, 剩下的子集不一定是条件备格, 甚至不一定是格。

由完备格的定义和性质可以看出, 完备格是一种特殊的偏序集, 完备格中的任意非空子集都有上确界和下确界, 显然也一定有泛界: 零元和单位元。这在可靠性理论中, 体现为系统存在最优和最劣的状态, 这正是系统工程中存在的实际情况。文献[99]中系统(部件)状态集为偏序集的假设具有广泛的适用性, 它几乎能描述任何单调关联性质的实际系统。也正是由于偏序集对系统(部件)状态集模拟的灵活性和通用性, 随着系统结构的复杂性提高会给运算带来诸多不便。由于实际工程中构成系统的部件个数都是有限的, 且系统最优状态(完好)和最劣状态(完全失效)可以唯一确定, 引入完备格描述系统状态集, 既能体现系统状态之间可能存在的不可比性, 也能为理论上研究系统可靠性较之系统状态集为偏序集的情况减少工作量。

5.3 系统的最小路集和最小割集的描述

从工程上讲，一个最小路集是部件的最小集合，这些部件正常时系统就正常；一个最小割集是部件的最小集合，这些部件失效时系统就失效。以完备格对系统状态集进行描述，需要考虑状态之间可能存在的不可比性。首先定义系统和部件的状态集，在此基础上，给出系统最小路集和最小割集的描述^[161]。

定义 5-5 假设系统由 n 个部件组成，部件和系统的状态集合分别以完备格 (E_i, \prec) 、 (S, \prec) ， $i \in [1, n]$ 来刻画。

$$(E_i, \prec): E_i = \{e_i^0, e_i^1, e_i^2, \dots, e_i^{M_i}\}, i \in [1, n]$$

$$(S, \prec): S = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_M\}$$

其中，各个集合都有唯一的最大元 $e_i^{M_i}, s_M$ 和最小元 e_i^0, s_0 。事实上，最大元表示部件和系统完好的状态，最小元表示部件和系统完全失效的状态。同时集合中各个元素之间的关系为偏序关系 \prec ，定义如下：

设 \mathbf{x}, \mathbf{y} 是取自部件状态乘积集空间 $\prod_{i=1}^n E_i$ 的任意两个元素， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ， $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ，则 $\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \Leftrightarrow \forall i \in 1, \dots, n, x_i \preceq y_i$ ，且 $\exists i_0, x_{i_0} \prec y_{i_0}$ 。事实上， $\prod_{i=1}^n E_i$ 内的最大元是 $e^M = \{e_1^{M_1}, e_2^{M_2}, \dots, e_n^{M_n}\}$ ，最小元是 $e^0 = \{e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0\}$ 。

定义 5-6 假设 n 是 ≥ 1 的任意自然数， $\prod_{i=1}^n E_i \rightarrow S$ 上的函数 ϕ 满足下列条件：

- (1) 可达性： $\forall s_l \in S, \exists \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^n E_i$ 使得 $\phi(\mathbf{x}) = s_l$
- (2) 正则性： $\phi(e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0) = s_0$ 和 $\phi(e_1^{M_1}, e_2^{M_2}, \dots, e_n^{M_n}) = s_M$
- (3) 单调性： $\left(\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \prod_{i=1}^n E_i\right) (\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) \preceq \phi(\mathbf{y}))$
- (4) 关联性：对 $i \in [1, n]$ ， $\exists \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^n E_i$ ，使得 $\phi((e_i^{M_i})_i, \mathbf{x}) \succ \phi((e_i^0)_i, \mathbf{x})$

则称 ϕ 为多状态单调关联系统的结构函数。

由于部件和系统的状态集合 $E_i (i \in [1, n])$ ， S 均有最大元和最小元，易知结构函数 $\phi: \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow S$ 的对偶结构函数存在，定义如下：

定义 5-7 设 ϕ^D 是 $\left(\prod_{i=1}^n E_i^D, \prec\right) \rightarrow \left(S^D, \prec\right)$ 上的映射，且对任意 $\prod_{i=1}^n E_i^D$ 中的元素 \mathbf{x}^D ，有 $\phi^D(\mathbf{x}^D) = \phi(\mathbf{x})$ ，则称 ϕ^D 是结构函数 ϕ 的对偶结构函数。

定理 5-5 若 ϕ 是满足定义 5-6 条件中的多状态单调关联系统的结构函数, 则 ϕ 的对偶结构函数 ϕ^D 同样是多状态单调关联系统的结构函数。

定义 5-8 对于 $\forall s_j \in S$, 若状态向量 \mathbf{x} 满足:

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) \succeq s_j, & \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^n E_i, \\ \phi(\mathbf{x}) \prec s_j, & \forall \mathbf{y} \prec \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \prod_{i=1}^n E_i \end{cases}$$

则称状态向量 \mathbf{x} 为 s_j 水平最小路向量。记 P_{s_j} 为 s_j 水平最小路向量的集合。

定义 5-9 对于 $\forall s_k \in S$, 若状态向量 \mathbf{x} 满足:

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) \preceq s_k, & \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^n E_i, \\ \phi(\mathbf{y}) \prec s_k, & \forall \mathbf{y} \prec \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \prod_{i=1}^n E_i \end{cases}$$

则称状态向量 \mathbf{x} 为 s_k 水平最小割向量。记 K_{s_k} 为 s_k 水平最小割向量的集合。

引入两函数

$$p_{s_j}^i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \mathbf{x} \succeq \mathbf{x}_{s_j}^i, \mathbf{x}_{s_j}^i \in P_{s_j} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$k_{s_k}^i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \mathbf{x} \preceq \mathbf{x}_{s_k}^i, \mathbf{x}_{s_k}^i \in K_{s_k} \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$$

可推得结构函数最小路、割表示式如下:

定理 5-6 设 ϕ 为多状态单调关联系统的结构函数, 则对 $\forall \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^n E_i$,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \bigvee_{sj \in S} s_j \cdot \max_{\mathbf{x}_{sj}^i \in P_{sj}} [p_{sj}^i(\mathbf{x})] \\ &= \bigvee_{sj \in S} s_j \cdot \max_{\mathbf{x}_{sj}^i \in P_{sj}} [p_{sj}^i(\mathbf{x})] \cdot \min_{sl \succ sj} \left[1 - \max_{\mathbf{x}_{sl}^i \in P_{sl}} p_{sl}^i(\mathbf{x}) \right] \\ \phi(\mathbf{x}) &= \bigvee_{sj \in S} s_j \cdot \max_{\mathbf{x}_{sj}^i \in P_{sj}} [p_{sj}^i(\mathbf{x})] \\ &= \bigvee_{sj \in S} s_j \cdot \max_{\mathbf{x}_{sj}^i \in P_{sj}} [p_{sj}^i(\mathbf{x})] \cdot \min_{sl \succ sj} \left[1 - \max_{\mathbf{x}_{sl}^i \in P_{sl}} p_{sl}^i(\mathbf{x}) \right] \end{aligned}$$

对于 ϕ 的对偶结构函数 ϕ^D , 有如下性质:

定理 5-7 设 ϕ 为多状态单调关联系统的结构函数, 则对 $\forall \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^n E_i$, \mathbf{x} 为 ϕ 的最小路(割)向量 $\Leftrightarrow \mathbf{x}^D$ 为 ϕ^D 的最小割(路)向量。

5.4 以完备格描述多状态系统状态集的系统可靠性分析

由于系统状态集 $(S, <)$ 为完备格，其各个状态之间为偏序关系，于是系统可能有多种方式从完好状态劣化至完全失效状态。记 $S_T = \{s_t\}_{t \in T} \subseteq S$ 为各条失效路径中系统工作的门限状态的集合，由于这一集合中的元素取自每一条失效路径，故而对于所有可能的系统状态，存在 S_T 中的元素可以与之比较优劣。即是说，若对于系统状态 s_j ， $\exists s_t \in S_T$ 使得 $s_j \succeq s_t$ ，则系统处于工作状态；若对于系统状态 s_l ， $\exists s_{t'} \in S_T$ 使得 $s_l \prec s_{t'}$ ，则系统处于失效状态。基于 S_T 这一系统门限状态集，系统状态被划分为两部分^[99]：

- (1) 门限状态集的上集合 $\bigcup_{t \in T} B(s_t) : B(s_t) = \{s_j | s_j \succeq s_t\}$ ；
- (2) 门限状态集的下集合 $\bigcup_{t \in T} W(s_t) : W(s_t) = \{s_j | s_j \prec s_t\}$ 。

系统的可能可靠性即为系统状态在门限状态集的上集合内的可能性。

5.4.1 完备格系统状态集的单部件系统可靠性分析

对于单部件系统，假设系统有 $M+1$ 个可能状态，记系统状态空间为 $(S, <)$ ：
 $S = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_M\}$ ，对于系统不同的失效路径有 $t+1$ 个门限状态，
 $S_T = \{\overline{s_0}, \overline{s_1}, \overline{s_2}, \dots, \overline{s_t}\}$ 表示系统的门限状态集。

- (1) 系统可靠性为系统状态优于门限状态之一的概率：

$$\begin{aligned}
 P\left\{s_j \mid s_j \in \bigcup_{s_t \in S_T} B(s_t)\right\} &= \sum_{s_t \in S_T} P(B(s_t)) \\
 &= \sum_{s_t \in S_T} P(s_j \mid s_j \succeq s_t) \\
 &= \sum_{s_t \in S_T} \left(\sum_{s_j \succeq s_t} P\{s_j\} \right) \\
 &= \sum_{s_j \succeq s_t, s_t \in S_T} P\{s_j\}
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

- (2) 系统可能可靠性为系统状态优于门限状态之一的可能性：

$$\begin{aligned}
 \Pi\left\{s_j \mid s_j \in \bigcup_{s_t \in S_T} B(s_t)\right\} &= \bigvee_{s_t \in S_T} \Pi(B(s_t)) \\
 &= \bigvee_{s_t \in S_T} \Pi\{s_j \mid s_j \succeq s_t\} \\
 &= \bigvee_{s_t \in S_T} \Pi\{s_t\}
 \end{aligned} \tag{5-2}$$

5.4.2 完备格系统状态集的串联系统可能可靠性分析

假设系统由 n 个不同型的部件串联而成，部件 i 有 $M_i + 1$ 个可能状态，有 $t_i + 1$ 个门限状态，记部件 i 的状态空间为 $(E_i, <): E_i = \{e_i^0, e_i^1, e_i^2, \dots, e_i^{M_i}\}$ ，部件 i 的门限状态集为 $E_{Ti} = \{\overline{e_{i0}}, \overline{e_{i1}}, \overline{e_{i2}}, \dots, \overline{e_{it_i}}\}$ ， $i \in [1, n]$ 。于是依照 5.4.1 节的结果，部件 i 的可靠性为：

$$\begin{aligned}
 P\left\{e_j \mid e_j \in \bigcup_{e_t \in E_{Ti}} B(e_t)\right\} &= \sum_{e_t \in E_{Ti}} P(B(e_t)) \\
 &= \sum_{e_j \succeq e_t, e_t \in E_{Ti}} P\{e_j\}
 \end{aligned} \tag{5-3}$$

部件 i 的可能可靠性为：

$$\begin{aligned}
 \Pi\left\{e_j \mid e_j \in \bigcup_{e_t \in E_{Ti}} B(e_t)\right\} &= \bigvee_{e_t \in E_{Ti}} \Pi(B(e_t)) \\
 &= \bigvee_{e_t \in E_{Ti}} \Pi\{e_j \mid e_j \succeq e_t\} \\
 &= \bigvee_{e_t \in E_{Ti}} \Pi\{e_t\}
 \end{aligned} \tag{5-4}$$

易知，系统的结构函数为 $\phi(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ， $\forall \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^n E_i$ ， $x_i \in E_i$ 。

(1) 串联系统可靠性计算如下：

$$\min_{i \in [1, n]} P\left\{e_j \mid e_j \in \bigcup_{e_t \in E_{Ti}} B(e_t)\right\} = \min_{i \in [1, n]} \left(\sum_{e_j \succeq e_t, e_t \in E_{Ti}} P\{e_j\} \right) \tag{5-5}$$

(2) 串联系统可能可靠性计算如下：

$$\min_{i \in [1, n]} \Pi\left\{e_j \mid e_j \in \bigcup_{e_t \in E_{Ti}} B(e_t)\right\} = \min_{i \in [1, n]} \left(\bigvee_{e_t \in E_{Ti}} \Pi\{e_t\} \right) \tag{5-6}$$

5.4.3 完备格描述系统状态集的并联系统可能可靠性分析

假设系统由 n 个不同型的部件并联而成，部件 i 有 $M_i + 1$ 个可能状态，有 $t_i + 1$ 个门限状态，记部件 i 的状态空间为 $(E_i, <): E_i = \{e_i^0, e_i^1, e_i^2, \dots, e_i^{M_i}\}$ ，部件 i 的门限状

态集为 $E_{T_i} = \{\overline{e_{i0}}, \overline{e_{i1}}, \overline{e_{i2}}, \dots, \overline{e_{it}}\}$, $i \in [1, n]$ 。易知, 系统的结构函数为 $\phi(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\forall \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^n E_i$, $x_i \in E_i$ 。依照式 (5-5) 和式 (5-6), 可以类似给出并联系统可靠性分析如下:

(1) 并联系统可靠性:

$$\max_{i \in [1, n]} P \left\{ e_j \left| e_j \in \bigcup_{e_t \in E_{T_i}} B(e_t) \right. \right\} = \max_{i \in [1, n]} \left(\sum_{e_j \succeq e_t, e_t \in E_{T_i}} P\{e_j\} \right) \quad (5-7)$$

(2) 并联系统可能可靠性:

$$\max_{i \in [1, n]} \Pi \left\{ e_j \left| e_j \in \bigcup_{e_t \in E_{T_i}} B(e_t) \right. \right\} = \max_{i \in [1, n]} \left(\bigvee_{e_t \in E_{T_i}} \Pi\{e_t\} \right) \quad (5-8)$$

5.4.4 完备格描述系统状态集的 $k/n(G)$ 表决系统可能可靠性分析

假设系统由 n 个同型部件组成, 当 k 个或 k 个以上部件正常工作时系统正常工作 ($1 \leq k \leq n$), 当有 $n-k+1$ 个部件故障时, 系统故障。易知, 当 $k=1$, $1/n(G)$ 系统就是 n 个部件的并联系统; 当 $k=n$, $n/n(G)$ 系统就是 n 个部件的串联系统。

设部件 i 有 $M+1$ 个可能状态, 有 $t+1$ 个门限状态, 记部件的状态空间为 $(E, \prec): E = \{e^0, e^1, e^2, \dots, e^M\}$, 部件的门限状态集为 $E_T = \{\overline{e_0}, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_t}\}$, $i \in [1, n]$ 。由概率测度的正规性可得部件状态劣于门限状态的概率为:

$$P \left\{ e_j \left| e_j \in \bigcup_{e_t \in E_T} B(e_t) \right. \right\} = 1 - \sum_{e_j \succeq e_t, e_t \in E_T} P\{e_j\} \quad (5-9)$$

部件状态劣于门限状态的可能性为:

$$\begin{aligned} \Pi \left\{ e_j \left| e_j \in \bigcup_{e_t \in E_T} B(e_t) \right. \right\} &= \Pi \left\{ e_j \left| e_j \in \left\{ E - \bigcup_{e_t \in E_T} B(e_t) \right\} \right. \right\} \\ &= \bigvee_{e_j \in \left\{ E - \bigcup_{e_t \in E_T} B(e_t) \right\}} \Pi\{e_j\} \end{aligned} \quad (5-10)$$

(1) $k/n(G)$ 表决系统可靠性为系统中至少有 k 个部件状态优于门限状态之一且余下部件状态劣于门限状态之一的概率:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k}^n C_n^i \cdot \left[P \left\{ e_j \left| e_j \in \bigcup_{e_t \in E_T} B(e_t) \right. \right\} \right]^i \cdot \left[1 - P \left\{ e_j \left| e_j \in \bigcup_{e_t \in E_T} B(e_t) \right. \right\} \right]^{n-i} \\ &= \sum_{i=k}^n C_n^i \cdot \left[\sum_{e_j \succeq e_t, e_t \in E_T} P\{e_j\} \right]^i \cdot \left[1 - \sum_{e_j \succeq e_t, e_t \in E_T} P\{e_j\} \right]^{n-i} \end{aligned} \quad (5-11)$$

(2) $k/n(G)$ 表决系统可靠性为系统中至少有 k 个部件状态优于门限状态之一

且余下部件状态劣于门限状态之一的可能性：

$$\begin{aligned}
 & \Pi \left\{ \begin{array}{l} \text{系统中至少有 } k \text{ 个部件状态优于门限状态之一,} \\ \text{余下部件状态劣于门限状态之一} \end{array} \right\} \\
 & \leq \Pi \left\{ \begin{array}{l} \text{系统中至少有 } k \text{ 个部件状态优于门限状态之一} \\ \wedge \Pi \left\{ \text{余下 } n-k \text{ 个部件状态劣于门限状态之一} \right\} \end{array} \right\} \quad (5-12) \\
 & = \min \left\{ 1, C_n^k \cdot \left[\Pi \left\{ e_j \mid e_j \in \bigcup_{e_i \in E_i} B(e_i) \right\} \wedge \Pi \left\{ e_j \mid e_j \in \overline{\bigcup_{e_i \in E_T} B(e_i)} \right\} \right] \right\} \\
 & = \min \left\{ 1, C_n^k \cdot \left[\left(\bigvee_{e_i \in E_T} \Pi \{e_i\} \right) \wedge \left(\bigvee_{e_j \in \{E - \bigcup_{e_i \in E_T} B(e_i)\}} \Pi \{e_j\} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

5.5 数值算例

以文献[99]中所列分布式处理系统为例，对多状态分布式处理系统在完备格框架下的可靠性进行分析。首先给出本文算例中分布式处理系统的假设：

(1) 分布式处理系统执行的作业可以分为两类，一类是仅需一个本地处理单元执行的本地作业，另一类是至少需要三个节点参与执行的分布式作业。

(2) 系统是由四个处理节点和若干通信链路以 Torus 拓扑结构构成。

(3) 各个链路均完好且不会故障失效。

(4) 每一节点包括一个处理单元 (Processing Element, 简记为 PE) 和一个通信控制器 (Communication Controller, 简记为 CC)。由于同一节点中的处理单元和通信控制器处在同一本地操作环境之下，它们之间是 s-相关的^[162]，不能简单的将一个节点分成两个部件来讨论，于是假设每一个节点即是系统的一个多状态的部件。

(5) 系统的行为特征由多状态集合进行描述。

下面分析部件 (处理节点) 的失效模式。

每一处理节点由一个处理单元和一个通信控制器构成，同一节点下的处理单元和通信控制器之间 s-相关，但它们之间的失效不相关。由处理节点的结构可以定义节点的四个状态：

状态 e_i^4 ：处理单元和通信控制器正常工作，处理节点处于完好状态。

状态 e_i^3 ：处理单元故障，通信控制器正常工作，处理节点能够完成一些常规性或通信作业。

状态 e_i^2 : 通信控制器故障, 处理单元正常工作, 处理节点能够完成本地作业, 但无法完成分布式作业。

状态 e_i^1 : 处理单元和通信控制器均故障。

通过对处理节点状态的定义, 节点功能效用的劣化顺序可由图 5-2 表示。同时, 对于分布式处理系统中的四个节点, 其状态空间分别为 $E_i = \{e_i^1, e_i^2, e_i^3, e_i^4\}$, $i=1, 2, 3, 4$ 。分析部件的四个状态, 状态 e_i^3 和状态 e_i^2 之间无法比较其优劣, 状态 e_i^4 是部件状态集 E_i 的上确界, 状态 e_i^1 是部件状态集 E_i 的下确界。部件状态集 E_i 依偏序关系 \leq 构成一个完备格。

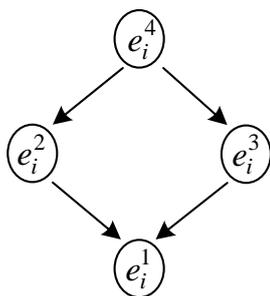


图 5-2 处理节点各状态的功能效用劣化图示

对于由四个处理节点构成的分布式处理系统, 其效用由处理能力 (Processing Capacity) 和通讯网络状态 (Communication Network Condition) 两个参数决定。处理能力取决于正常工作的处理单元个数; 通讯网络状态由通信控制器的状态所决定。从而, 处理能力可依正常工作的处理单元个数 0-4 进行描述, 通讯网络状态分为三种情况:

- (1) 完好 (perfect, p): 所有四个节点均完好连接;
- (2) 好 (good, g): 三个工作节点正常连接;
- (3) 坏 (bad, b): 至多有两个节点正常连接。

分布式处理系统状态可由表 5-1 进行指派。

表 5-1 分布式处理系统状态对应图

PE	4	3	2	1	0
CC	p g b	p g b	—	—	—
State	$s_7 s_6 s_5$	$s_4 s_4 s_3$	s_2	s_1	s_0

例如, 系统状态 s_4 表示分布式处理系统拥有对三个节点的处理能力, 从而能够完成分布式作业。于是, 分布式处理系统状态集 $S = \{s_i\}_{i=0}^7$, 系统中各状态之间的序关系由图 5-3 所描述。经过分析可以不难推出, 系统状态集 S 依偏序关系 \leq 构成一

个完备格。

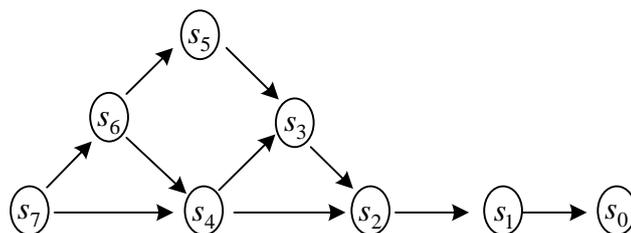


图 5-3 分布式处理系统状态的序关系

由此，表征部件状态与系统状态之间函数关系的结构函数 ϕ 定义如下：

$$\phi \equiv \begin{cases} s_7, & \text{系统处于完好状态} \\ s_6, & \text{各个处理单元均正常工作，一个通信控制器故障} \\ s_5, & \text{各个处理单元均正常工作，两个通信控制器故障} \\ s_4, & \text{一个处理单元故障且同一节点下的通信控制器可能也故障，} \\ & \text{其他三个节点均正常} \\ s_3, & \text{一个处理单元故障，且至少有一个其他节点下的通信控制器故障} \\ s_2, & \text{两个处理单元故障} \\ s_1, & \text{三个处理单元故障} \\ s_0, & \text{各个处理单元均故障} \end{cases}$$

设分布式处理系统处于工作状态当且仅当系统能够完成分布式作业，于是系统中的门限状态集为 $\{s_4, s_6\}$ ，从而由式 (5-1) 可得系统可靠性为：

$$P\left\{s_j \mid s_j \in \bigcup_{s_i \in S_T} B(s_i)\right\} = P\{s_4\} + P\{s_6\} + P\{s_7\} \quad (5-13)$$

令 $\Pi\{e_i^j\}$ 为节点 i 的状态 e_i^j 的可能性， $\Pi\{s_j\}$ 为系统状态 s_j 的可能性。由式 (5-2) 可得系统可能可靠性为：

$$\Pi\left\{s_j \mid s_j \in \bigcup_{s_i \in S_T} B(s_i)\right\} = \Pi\{s_4\} \vee \Pi\{s_6\} \vee \Pi\{s_7\} \quad (5-14)$$

文献[99]中已给出概率方法下系统可靠性的计算。基于可能性理论，给出系统可能可靠性的计算。依据处理节点各状态的功能效用劣化图 5-2 可对节点 i 的状态 $\{e_i^j\}$, $j=1,2,3,4$ 对应的可能性 $\Pi\{e_i^j\}$ 做如下比较：

$$\Pi(e_i^4) \leq \Pi(e_i^3) \leq \Pi(e_i^1) \quad (5-15)$$

$$\Pi(e_i^4) \leq \Pi(e_i^2) \leq \Pi(e_i^1) \quad (5-16)$$

首先对系统门限状态集中元素的可能性进行分析。状态 s_4 表征分布式处理系统中一个处理单元 (PE) 故障且同一节点下的通信控制器 (CC) 可能也故障，余下三个节点均正常工作。

$$\begin{aligned}
 \Pi\{s_4\} &= \Pi\{\text{三个节点正常工作, 余下一个节点PE故障}\} \\
 &= \Pi\left(\{\text{三个节点正常工作}\} \cap (\{\text{PE故障, CC故障}\} \cup \{\text{PE故障, CC正常}\})\right) \\
 &\leq \Pi\{\text{三个节点正常工作}\} \wedge \Pi\left(\{\text{PE故障, CC故障}\} \cup \{\text{PE故障, CC正常}\}\right) \\
 &= \Pi\{\text{三个节点正常工作}\} \wedge (\Pi\{\text{PE故障, CC故障}\} \vee \Pi\{\text{PE故障, CC正常}\}) \\
 &\leq \Pi\{e_i^4\} \wedge \Pi\{e_{i_2}^4\} \wedge \Pi\{e_{i_3}^4\} \wedge (\Pi\{e_{i_4}^3\} \vee \Pi\{e_{i_4}^1\}) \\
 &= \Pi\{e_i^4\} \wedge (\Pi\{e_{i_3}^3\} \vee \Pi\{e_{i_4}^1\}) \\
 &= \Pi\{e_i^4\}
 \end{aligned}$$

上式中倒数第二个等式是由于构成分布式处理系统的四个节点由完全相同的处理单元和通信控制器组成, 各个节点均服从相同的分布。最后一个等式由式(5-15)和式(5-16)得到。

状态 s_6 表征分布式处理系统中各个处理单元 (PE) 均正常工作, 一个通信控制器 (CC) 故障的状态。状态 s_7 表征系统各个节点均处于完好状态。

$$\begin{aligned}
 \Pi\{s_6\} &= \Pi\{\text{三个节点正常工作, 余下一个节点PE正常, CC故障}\} \\
 &= \Pi\left(\{\text{三个节点正常工作}\} \cap \{\text{PE正常, CC故障}\}\right) \\
 &\leq \Pi\{\text{三个节点正常工作}\} \wedge \Pi\{\text{PE正常, CC故障}\} \\
 &\leq \Pi\{e_i^4\} \wedge \Pi\{e_{i_2}^4\} \wedge \Pi\{e_{i_3}^4\} \wedge \Pi\{e_{i_4}^2\} \\
 &= \Pi\{e_i^4\} \\
 \Pi\{s_7\} &= \Pi\{\text{四个节点均正常工作}\} \\
 &\leq \Pi\{e_i^4\} \wedge \Pi\{e_{i_2}^4\} \wedge \Pi\{e_{i_3}^4\} \wedge \Pi\{e_{i_4}^4\} = \Pi\{e_i^4\}
 \end{aligned}$$

由于 $\Pi\{s_4\}$ 、 $\Pi\{s_6\}$ 、 $\Pi\{s_7\}$ 有共同的上界 $\Pi\{e_i^4\}$, 从而根据式(5-14), 可利用系统门限状态集中状态的可能性对系统可能可靠性进行界定。

$$\Pi\left\{s_j \mid s_j \in \bigcup_{s_i \in S_T} B(s_i)\right\} = \Pi\{s_4\} \vee \Pi\{s_6\} \vee \Pi\{s_7\} \leq \Pi\{e_i^4\}$$

事实上, 分布式处理系统要求三个节点的处理能力, 即要求三个节点处于工作状态, 状态 e_i^4 表征处理节点处于工作状态。由于可能性测度的性质, 分布式处理系统的可能可靠性便简化为以节点状态 e_i^4 的可能性为界定。

假设对于处理节点各状态的可能度有如下数据:

$$\Pi\{e_i^1\} = 1, \quad \Pi\{e_i^2\} = 0.95, \quad \Pi\{e_i^3\} = 0.9, \quad \Pi\{e_i^4\} = 0.8$$

于是, 要求三个节点参与执行分布式作业的分布式处理系统可能可靠性的上界为 0.8。

5.6 本章小结

本章假设系统和部件状态空间为建立在偏序关系上的完备格，以描述状态之间可能出现的不可比性质。与偏序集不同的是，以完备格描述状态集的系统结构函数一定存在对偶结构函数。同时，对以完备格描述多状态系统状态集的串联系统、并联系统和表决系统等典型系统分别基于概率论和可能性理论进行系统可靠性分析和系统可能可靠性分析，得出系统可靠性和可能可靠性的表达式，为进一步对偏序关系上的多状态单调关联系统提供理论基础。以分布式处理系统为例，设系统中处理节点的状态集由完备格进行描述，得到同样以完备格进行描述的分布式处理系统的状态集。在可能性理论的基础上对分布式处理系统的可能可靠性进行分析和界定。

第六章 结论

随着人类社会的迅猛发展和科学技术的不断进步，知识系统不断丰富和完善，人类认识能力不断提高，产品不断更新，现代系统和制造设备也日趋复杂和先进。传统的用于处理不确定性问题的概率论难以描述由于信息的缺失和知识的匮乏所产生的认知不确定性。可能性理论以可能性测度和必要性测度这一组测度来完成对认知不确定性的描述，它的提出和发展为处理工程中的认知不确定性提供了方法。同时，考虑到系统状态之间可能存在的不可比性，提出以完备格来描述系统状态集，不再假设系统各个状态能够依照其相应功能水平的下降排成一个序列。本文基于可能性理论和格论深入地开展了认知不确定性下系统可靠性分析的工作。

6.1 本文的主要贡献

针对系统可靠性理论发展中存在的亟待解决的难题和挑战，本文以解决认知不确定性和表达系统状态不可比性两个问题为出发点，基于可能性理论和格论对系统可靠性分析进行了研究，其主要内容有：

(1) 将凸子格的概念引入可靠性理论研究中，获取了结构函数等价类的凸子格上下界集及其上下限。假设系统状态集为完备格，在 Cappelle 和 Kerre 博士提出的同余关系的基础上引入凸子格的概念进行系统可能可靠性分析，给出结构函数上的等价类，得到等价类上的上下界集均为凸子格，推出结构函数集的一些重要边界，讨论相关的定义和性质在理论和实际工程中的应用，将理论与实际相结合，为工程中得到满足条件的更好的系统结构提供了理论基础。

(2) 基于可能性理论对多状态系统进行了可能可靠性分析，提供了系统可能可靠性的计算方法。由于系统状态的离散性，使得系统状态可能性分布难以获取，从而导致由 Cappelle 和 Kerre 博士提出的将多状态结构函数理论和可能性理论相结合的系统可能可靠性分析停留在初级阶段。本文延续了 Cappelle 和 Kerre 博士的工作，定义最大可能剩余寿命来表征系统状态与剩余寿命之间的内在函数关系，在他们提出的系统可能可靠性函数的定义中引入系统状态变化的观测时刻这一联系系统状态与其对应的最大可能剩余寿命之间函数关系的变量，将难以入手的系统

状态可能性分析转化为一定条件下对系统寿命可能性的分析，从而得到系统可能可靠性的计算方法。同时，对系统的可靠水平状态和观测时刻对系统可能可靠性的影响进行分析，完善了对系统可能可靠性理论的研究。

(3) 介绍部分故障影响可忽略或可延迟的模型，开展对部分故障影响可忽略的两部件并联可维修系统可靠性分析以及部分故障可忽略或延迟的单部件可维修系统的可能可靠性分析。在对并联可维修马尔可夫系统开展讨论时仅考虑部分故障影响可忽略的情形，基于两部件并联可修的原有系统建立部分故障影响可忽略的新系统模型，并利用概率论和可靠性理论计算新系统的可靠性指标。对单部件可维修系统不仅考虑了部分故障影响可忽略，还考虑了部分故障影响可延迟的情形，利用可能性理论对新系统进行分析，得到了系统的瞬时可能可用度，以推进可能性理论在可靠性理论中的发展和应用。

(4) 提出用完备格来描述系统状态集，并对几类典型系统开展了系统可靠性分析。由于实际工程中的具体情况，致使全序集对实际系统状态集的描述不够完善，提出用偏序关系上的完备格这一代数系统来模拟多状态系统状态集。同时考虑到工程实际中的随机不确定性和认知不确定性，分别从概率论和可能性理论出发，展开对以完备格描述多状态系统状态集的典型系统的可靠性分析，得到系统可靠性和可能可靠性的表达式，为进一步对偏序关系上的多状态单调关联系统分析提供了理论基础。

6.2 下一步工作的展望

本文对 Cappelle 和 Kerre 博士提出的将多状态结构函数理论和可能性理论相结合的系统可能可靠性分析展开了进一步的研究，对反映部件状态和系统状态之间函数关系的结构函数通过已有信息加以界定，对多状态系统进行可能可靠性分析和计算，引入部分故障影响可忽略或可延迟的模型拓展可能可靠性理论，用完备格完善对系统状态的表达，对系统可靠性进行研究，从而实现可能性理论和格论相结合的可靠性分析。在此基础上，今后将继续围绕系统中存在的不确定性和系统状态不可比性两个问题开展进一步的研究：

(1) 为部分故障影响可忽略或可延迟的复杂可修系统提供可靠性分析和计算方法。本文仅开展了部分故障可忽略的两部件并联可修系统的可靠性分析和部分故障可忽略或可延迟的单部件可修系统可能可靠性分析。在实际工程中系统结构纷繁复杂，单部件系统和两部件并联系统往往无法对系统的结构特征进行描述，

这就需要基于部分故障可忽略或可延迟的假设对复杂可修系统进行可靠性分析。

(2) 利用完备格的性质对多状态系统在完备格框架下的可靠性分析进行进一步简化和探索。完备格具有任意非空子集都有上确界和下确界的性质，依据这一性质并结合可能性测度的次可加性，基于本文中推导的系统可能可靠性表达式给出系统可能可靠性的上下界，从而拓展可能性理论和格论在可靠性理论中的应用研究。

(3) 针对随机不确定性和认知不确定性同时存在的实际情况，结合概率论和可能性理论对完备格框架下的多状态系统进行可靠性分析和计算。本文主要结合可能性理论和格论对系统可能可靠性进行分析，在针对不确定性的讨论中着重研究了认知不确定性而弱化了随机不确定性的客观存在。事实上，这两类不确定性同时大量存在于工程实际中，有必要在假设系统和部件状态集为建立在偏序关系上的完备格的条件下开展对随机不确定性和认知不确定性同时存在下的系统可靠性进行分析。

(4) 结合实际工程问题、企业需要解决的产品问题进行应用验证工作。本文整体偏重理论研究，后续的研究中考虑将可能性理论和格论相结合的系统可靠性分析方法应用到工程实际问题，进一步对复杂结构系统进行研究，结合具体工程实例推广应用基于可能性理论和格论的多状态系统可靠性理论方法。

致 谢

论文即将停笔，似乎意味着我的博士生生活也行将结束。回首过去几年的研究生生活，心中不由万千思绪。非常庆幸的是我能在这样一个积极向上又温暖的集体中度过人生中最美好的几年。最想对我的导师黄洪钟教授衷心地道一声感谢，却才发觉这一声感谢要承载的太多太多。在过去四年多的时间，黄老师不仅为我的学业付出了大量心血和关怀，还为我们树立端正的世界观和人生观。他以严谨的治学态度和宽宏的待人原则感染着我和周围的每一位同学。工作日八小时外的时间，导师办公室的灯依然亮着，他在为团队和学院的发展呕心沥血；节假日，导师挤出与家人团聚的时间为我们修改论文。正是黄老师所具有的渊博的智慧，丰富的经验，严谨的治学态度和积极的人生态度让我在遇到困难想要放弃的时候为我提供前进的动力、克服自己畏难的情绪、找回继续前行的信心、成功的完成我博士阶段的学习。在此谨向恩师致以最崇高的敬意！

衷心感谢日本筑波大学的 Toshiyuki Inagaki 教授，在我留学一年期间从学术上和生活中都给予了莫大的关怀，让我在异国他乡感受到极大的温暖。

衷心感谢学院左明健老师、苗强老师、凌丹老师、刘宇老师、陈中柘老师、汪忠来老师、李海庆老师、孙锐老师、张小玲老师及朱顺鹏老师，还有学院负责研究生管理工作的熊茜桃老师和岳萍老师，感谢她们这些年来在学习和生活上对我的关怀和帮助。

衷心感谢我的博士同学们，肖宁聪博士、李彦锋博士、甘露萍博士、孟德彪博士、袁容博士、周行博士、杨圆鉴博士、谢朝阳博士、彭卫文博士，还有硕士学弟学妹们，我会铭记朝夕相处、一起探讨、共同交流、并肩走过的日子，感谢他们的鼓励和帮助。

衷心感谢我的父母，是他们无私的爱才有今天的我，谢谢他们的理解和支持，让我有勇气和信心完成学业！

衷心感谢百忙之中抽出时间参与本文评审和答辩的各位教授和专家。

最后，对文中所引文献的作者一并表示最真诚的感谢！

参考文献

- [1] 李杰. 随机结构系统-分析与建模[M]. 北京: 科学出版社, 1996, 1-4
- [2] 邱志平. 非概率集合理论凸方法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005, 85-109
- [3] L. Zhao, Q. Chen. Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with parameters to random excitation[J]. Computers and Structures, 2000, 77(6): 651-657
- [4] J. J. Chen, J. W. Che, H. A. Sun, et al. Probabilistic dynamic analysis of truss structures[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2005, 13(2): 231-239
- [5] W. Gao, J. J. Chen. Dynamic response analysis of stochastic frame structures under non-stationary random excitation [J]. AIAA Journal, 2004, 42(9): 1818-1822
- [6] S. X. Guo, Z. Z. Lv, L. F. Feng. Fuzzy arithmetic and solving of the static governing equations of fuzzy finite element method[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2002, 23(9): 1054-1061
- [7] S. S. Rao, L. Cao. Fuzzy boundary element method for the analysis of imprecisely defined systems[J]. AIAA Journal, 2001, 39(9): 1788-1797
- [8] D. Moens, D. Vandepitte. Fuzzy finite element method for frequency response function analysis of uncertain structures[J]. AIAA Journal, 2002, 40(1): 126-136
- [9] H. Z. Huang, H. B. Li. Perturbation finite element method of structural analysis under fuzzy environments[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2005, 18(1): 83-91
- [10] W. L. Oberkampf, J. C. Helton, C. A. Joslyn, et al. Challenge problems: Uncertainty in system response given uncertain parameters[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2004, 85(1-3): 11-19
- [11] B. D. Youn, K. K. Choi, L. Du, et al. Integration of possibility-based optimization and robust design for epistemic uncertainty[J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2007, 129(8): 876-882
- [12] C. Simon, P. Weber. Evidential networks for reliability analysis and performance evaluation of systems with imprecise knowledge[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2009, 58(1): 69-87
- [13] H. J. Zimmermann. Fuzzy Set Theory and Its Applications[M]. London: Kluwer Academic Publisher, 1992, 111-139
- [14] H. Bandemer, S. Gottwald. Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Fuzzy Methods, with Applications[M], Chichester: John Wiley & Sons, 1995, 1-239

- [15] A. Cherki, G. Plessis, B. Lallemand, et al. Fuzzy behavior of mechanical systems with uncertain boundary conditions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 189(3): 863-873
- [16] G. Shafer. *Mathematical Theory of Evidence*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976, 35-73
- [17] E. Zio. Risk-informed Regulation: Handling uncertainty for a rational management of safety[J]. *Nuclear Engineering and Technology*, 2008, 40(5): 327-348
- [18] S. Salicone. *Measurement uncertainty: an approach via the mathematical theory of evidence*[M]. New York: Springer, 2007, 17-48
- [19] G. Alefeld, J. Herzberger. *Introduction to Interval Computations*[M]. New York: Academic Press, 1983, 70-141
- [20] K. Y. Cai. *Introduction to Fuzzy Reliability*[M]. Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 1996, 1-29
- [21] D. Dubois, H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*[M]. New York: Academic Press, 1980, 9-146
- [22] 王新堂, 王建民. 基于 FOSM 法的预应力钢桁架系统可靠性分析[J]. *计算力学学报*, 2007, 24(1): 40-43
- [23] S. H. Han, W. S. Park. Reliability assessment of corrosion initiation of harbor concrete structure using FOSM[J]. *Key Engineering Materials*, 2008, 385-387: 621-624
- [24] C. G. Bucher, U. Bourgund. Fast and efficient response surface approach for structural reliability problems[J]. *Structural Safety*, 1990, 7(1): 57-66
- [25] L. Yu, P. K. Das, Y. Zheng. A response surface approach to fatigue reliability of ship structures[J]. *Ships and Offshore Structures (Special Issue: Reliability Analysis in the Design of Structures)*, 2009, 4(3): 253-259
- [26] R. Billinton, W. Y. Li. *Reliability assessment of electric power systems using Monte Carlo methods*[M]. New York: Plenum Press, 1994, 33-74
- [27] 陆中, 孙有朝. 基于 Monte Carlo 法与 GA 算法的复杂系统可靠度求解[J]. *系统工程与电子技术*, 2008, 30(12): 2519-2522
- [28] C. A. Cornell. A probability-based structural code[J]. *Journal of the American Concrete Institute*, 1969, 66(12): 974-985
- [29] A. M. Hasofer, N. C. Lind. Exact and invariant second-moment code format[J]. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1974, 100(1): 111-121

- [30] R. Rackwitz, B. Fiessler. Structural reliability under combined random load sequences[J]. Computers and Structures, 1978, 9(5): 489-494
- [31] G. E. P. Box, K. B. Wilson. On the experimental attainment of optimum conditions[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1951, 13(1): 1-35
- [32] F. S. Wong. Slope reliability and response surface method[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1985, 111(1): 32-53
- [33] C. G. Bucher, U. Bourgund. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems[J]. Structural Safety, 1990, 7(1): 57-66
- [34] M. R. Rajashekhar, B. R. Ellingwood. New look at the response surface approach for reliability analysis[J]. Structural Safety, 1993, 12(3): 205-220
- [35] Y. W. Liu, F. Moses. A sequential response surface method and its application in the reliability analysis of aircraft structural systems[J]. Structural Safety, 1994, 16(1-2): 39-46
- [36] S. H. Kim, S. W. Na. Response surface method using vector projected sampling points[J]. Structural Safety, 1997, 19(1): 3-19
- [37] B. D. Youn, K. K. Choi. A new response surface methodology for reliability-based design optimization[J]. Computers and Structures, 2004, 82(2-3): 241-256
- [38] H. P. Gavin, S. C. Yau. High-order limit state functions in the response surface method for structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 2008, 30(2): 162-179
- [39] H. F. Ma, A. H. S. Ang. Reliability analysis of redundant ductile structural systems[R]. Structural Research Series No.494, Report No. UILU-ENG-81-2013, Urbana: Department of Civil Engineering, University of Illinois, August, 1981
- [40] C. G. Bucher. Adaptive sampling-an iterative fast Monte Carlo procedure[J]. Structural Safety, 1988, 5(2): 119-126
- [41] R. E. Melchers. Importance sampling in structural system[J]. Structural Safety, 1989, 6(1): 3-10
- [42] Y. Mori, T. Kato. Multi-normal integrals by importance sampling for series system reliability[J]. Structural Safety, 2003, 25(4): 363-378
- [43] 张崎, 李兴斯. 结构可靠性分析的模拟重要抽样方法[J]. 工程力学, 2007, 24(1): 33-34
- [44] 吴世伟. 结构可靠度分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 1990, 117-140
- [45] J. S. Liu. Monte Carlo Strategies in scientific computing[M]. New York: Springer, 2001, 53-104
- [46] 黄洪钟. 对常规可靠性理论的批判性评述-兼论模糊可靠性理论的产生、发展及应用前景[J]. 机械设计, 1994, 11(3): 1-5, 47
- [47] R. E. Moor. Interval Analysis[M]. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1966, 1-39

- [48] R. E. Moor. Methods and applications of interval analysis[M]. Philadelphia: SIAM Publications, 1979, 9-18
- [49] Y. Ben-Haim, I. Elishakoff. Discussion on: a non-probabilistic concept of reliability[J]. Structural Safety, 1995, 17(3): 195-199
- [50] Y. Ben-Haim. Non-probabilistic concept of reliability[J]. Structural Safety, 1994, 14(4): 227-245
- [51] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报, 2001, 18(1): 56-60
- [52] 郭书祥, 吕震宙. 区间可靠性分析的概率和非概率混合模型[J]. 机械强度, 2002, 24(4): 524-526
- [53] 郭书祥, 吕震宙. 结构体系的非概率可靠性分析方法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(3): 332-335
- [54] 郭书祥, 张凌, 李颖. 结构非概率可靠性指标的求解方法[J]. 计算力学学报, 2005, 22(2): 227-231
- [55] 吕震宙, 冯蕴雯, 岳珠峰. 改进的区间截断法及基于区间分析的非概率可靠性分析方法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(3): 260-264
- [56] 孙海龙, 姚卫星. 典型系统的区间可靠性分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2007, 39(5): 637-641
- [57] 郭书祥. 非随机不确定结构的可靠性方法和优化设计研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2002, 11-28
- [58] Y. Ben-Haim, I. Elishakoff. Convex models of uncertainty in applied mechanics[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 1990, 44-69
- [59] I. Elishakoff, P. Elisseff, S. A. L. Glegg. Non probabilistic convex theoretic modeling of scatter in material properties[J]. AIAA Journal, 1994, 32(4): 543-549
- [60] I. Elishakoff, G. Q. Cai, J. H. Starnes. Non-linear buckling of a column with initial imperfection via stochastic and non-stochastic convex models[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1994, 29(1): 71-82
- [61] I. Elishakoff, P. Colombi. Combination of probabilistic and convex models of uncertainty when scarce knowledge is present on acoustic excitation parameters[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993, 104(2): 187-209
- [62] Y. Ben-Haim. Convex models of uncertainty in radial pulse buckling of shells[J]. Journal of Applied Mechanics, 60(3), 1993: 683-688

-
- [63] Y. Ben-Haim. Non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models[J], *Structural Safety*, 1995, 17(2): 91-109
- [64] Y. Ben-Haim, G. Chen, T. T. Soong. Maximum structural response using convex models[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1996, 122(4): 325-333
- [65] K. Y. Cai, C. Y. Wen, M. L. Zhang. Fuzzy variables as a basis for a theory of fuzzy reliability in the probability context[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 37(1): 161-172
- [66] K. Y. Cai, C. Y. Wen, M. L. Zhang. Fuzzy states as a basis for a theory of fuzzy reliability[J]. *Microelectronics and Reliability*, 1993, 33(15): 2253-2263
- [67] K. Y. Cai, C. Y. Wen, M. L. Zhang. Fuzzy variables for a basis for a theory of fuzzy reliability in the possibility context[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 42(2): 145-172
- [68] K. Y. Cai, C. Y. Wen, M. L. Zhang. Possibilistic reliability behavior of typical systems with two types of failure[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 43(1): 17-32
- [69] K. Y. Cai, C. Y. Wen, M. L. Zhang. Possibilistic reliability behavior of fault-tolerant systems[J]. *Microelectronics and Reliability*, 1995, 35(1): 49-56
- [70] B. Cappelle. Multistate structure functions and possibility theory: an alternative approach to reliability[M], In: *Introduction to the Basic Principles of Fuzzy Set Theory and Some of Its Applications*, Gent: Communication and Cognition, 1991, 252-293
- [71] B. Cappelle, E. E. Kerre. Possibilistic and necessistic reliability functions: fundamental concepts and theorems to represent non-probabilistic uncertainty in reliability theory[M]. In: *Uncertainty Modeling and Analysis Theory and Applications*, Amsterdam: Elsevier, 1994, 131-144
- [72] B. Cappelle, E. E. Kerre. On a possibilistic approach to reliability theory[C]. *Proceedings of the 2nd International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis*, Maryland, 1993, 415-418
- [73] J. Montero, B. Cappelle, E. E. Kerre. The usefulness of complete lattices in reliability theory[M]. In: *Reliability and Safety Analyses under Fuzziness (Studies in Fuzziness, Vol.4)*, Heidelberg: Physica, 1995, 95-110
- [74] B. Cappelle, E. E. Kerre. A general possibilistic framework for reliability theory[M]. In: *Advances in Intelligent Computing-IPMU' 94 (Lecture Notes in Computer Science, Vol.945)*, Berlin: Springer, 1995, 311-317
- [75] B. Cappelle, E. E. Kerre. Issues in possibilistic reliability theory[M]. In: *Reliability and Safety Analyses under Fuzziness (Studies in Fuzziness, Vol.4)*, Heidelberg: Physica, 1995, 95-110
- [76] B. Cappelle, E. E. Kerre. An algorithm to compute possibilistic reliability[C]. *Proceedings of*

- the 3rd International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis and Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, Maryland, 1995, 350-354
- [77] B. Cappelle. Irreducible elements and the possibilistic and necessistic reliability functions[M]. Foundations and Applications of Possibility Theory (Advances in Fuzzy Systems, Vol.8), Singapore; River Edge, NJ: World Scientific, 1995, 267-276
- [78] L. V. Utkin, S. V. Gurov. General formal approach for fuzzy reliability analysis in the possibility context[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 83(2): 203-213
- [79] C. Cremona, Y. Gao. Possibilistic reliability theory: theoretical aspects and applications[J]. Structural Safety, 1997, 19(2): 173-201
- [80] 郭书祥, 吕震宙, 冯立富. 基于可能性理论的结构模糊可靠性方法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(1): 89-93
- [81] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(1): 3-28
- [82] B. Cappelle, E. E. Kerre. Computer assisted reliability analysis: an application of possibilistic reliability theory to a subsystem of a nuclear power plant[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 74(1): 103-113
- [83] S. Medasani, J. Kim, R. Krishnapuram. Overview of membership function generation techniques for pattern recognition[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1998, 19(3-4): 391-417
- [84] G. Birkhoof. Lattice Theory[M], New York: AMS Colloquium Publication, 1948, 16-64
- [85] R. E. Barlow, A. S. Wu. Coherent systems with multi-state components[J]. Mathematics of Operations Research, 1978, 3(4): 275-281
- [86] E. El-Newehi, F. Proschan, J. Sethuraman. Multisate coherent systems[J]. Journal of Applied Probability, 1978, 15(4): 675-688
- [87] S. M. Ross. Multivalued state component systems[J]. The Annals of Probability, 1979, 7(2): 379-383
- [88] W. S. Griffith. Multistate reliability models[J]. Journal of Applied Probability, 1980, 17: 735-744
- [89] X. Janan. On Multistate system analysis[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1985, R-34(4): 329-337
- [90] T. Aven. Reliability evaluation of multistate systems with multistate components[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1985, R-34(5): 473-479

-
- [91] J. Xue. Dynamic reliability analysis of coherent multistate systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1995, 44(4): 683-688
- [92] J. Huang, M. J. Zuo, Y. Wu. Generalized multi-state k-out-of-n: G systems, IEEE Transactions on Reliability, 2000, 49(1): 105-111
- [93] A. Lisnianski, G. Levitin Multi-state System Reliability: Assessment, Optimization and Applications[M]. Singapore: World Scientific, 2003, 51-151
- [94] Y. Liu, H. Z. Huang. Optimal replacement policy for multi-state system under imperfect maintenance[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2010, 59(3): 483-495
- [95] L. Caldarola. Coherent systems with multistate components[J]. Nuclear Engineering and Design, 1980, 58:127-139
- [96] A. P. Wood. Multistate block diagrams and fault trees[J]. IEEE Transactions on Reliability, R-34:236-240, 1985
- [97] M. Veeraraghavan, K. S. Trivedi. Combinatorial algorithm for performance and reliability analysis using multistate models[J]. IEEE Transactions on Computers, 1994, 43(2): 229-234
- [98] X. Zang, D. Wang, H. Sun, et al. A BDD-based algorithm for analysis of multistate systems with multistate components[J]. IEEE Transactions on Computers, 2003, 52(12): 1608-1618
- [99] K. Yu, I. Koren, Y. Guo. Generalized multistate monotone coherent systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1994, 43(2): 242-250
- [100] H. Pham. Reliability of systems with multiple failure modes[M]. Handbook of Reliability Engineering, London (Part I), New York: Springer, 2003, 19-36
- [101] K. Kołowrocki, J. Soszyńska-Budny. Modeling reliability and safety of multistate systems with ageing components[M]. Reliability and Safety of Complex Technical Systems and Processes (Springer Series in Reliability Engineering), London: Springer, 2011, 1-52
- [102] B. J. Bichona, J. M. McFarlanda, S. Mahadevan. Efficient surrogate models for reliability analysis of systems with multiple failure modes[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2011, 96(10): 1386–1395
- [103] Z. L. Wang, H. Z. Huang, X. Du. Optimal design accounting for reliability, maintenance, and warranty[J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2010, 132(1): 011007.1-011007.8.
- [104] M. J. Zuo, J. S. Huang, W. Kuo. Multi-state k-out-of-n systems[M]. In: Handbook of Reliability Engineering, London: Springer-Verlag, 2003, 3-17
- [105] E. Zio. Reliability engineering: Old problems and new challenges[J]. Reliability Engineering

- and System Safety, 2009, 94(2): 125–141
- [106] A. J. Li, Y. Wu, K. K. Lai, et al. Reliability estimation and prediction of multi-state components and coherent systems[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2005, 88(1): 93-98
- [107] A. Lisnianski, I. Frenkel, Y. Ding. Multi-state system reliability analysis and optimization for engineers and industrial managers[M]. London: Springer-Verlag, 2010, 1-28
- [108] H. Z. Huang, X. Zhang. Design optimization with discrete and continuous variables of aleatory and epistemic uncertainties[J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2009, 131(3): 031006.1-031006.8
- [109] P. R. Adduri, R. C. Penmetsa. System reliability analysis for mixed uncertain variables[J]. Structural Safety, 2009, 31(5): 375-382
- [110] D. Dubois, H. Prade. Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: A clarification[J]. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 2001, 32(1-4): 35-66
- [111] D. Dubois, H. Prade. Possibility theory and its applications a retrospective and prospective view[C]. The 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Toulouse, 2003, 5-11
- [112] D. Singer. A fuzzy set approach to fault tree and reliability analysis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 34(2): 145-155
- [113] Z. L. Wang, H. Z. Huang, L. Du. Reliability analysis on competitive failure processes under fuzzy degradation data[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(3): 2964-2973
- [114] L. P. He, F. Z. Qu. Possibilistic entropy-based measure of importance in fault tree analysis[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(2): 434-444
- [115] A. Hunter, W. R. Liu. A Context-dependent algorithm for merging uncertain information in possibility theory[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics: Part A-Systems and Humans, 2008, 38(6): 1385-1397
- [116] Z. P. Mourelatos, J. Zhou. Reliability estimation and design with insufficient data based on possibility theory[J]. AIAA Journal, 2005, 43(8): 1696-1705
- [117] L. Podofillini, E. Zio, D. Mercurio, et al. Dynamic safety assessment: Scenario identification via a possibilistic clustering approach[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2010, 95(5): 534-549
- [118] F. Delmotte, P. Borne. Modeling of reliability with possibility theory[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Part A: Systems and Humans, 1998, 28(1): 78-88
- [119] L. P. He, H. Z. Huang, L. Du, et al. A review of possibilistic approaches to reliability analysis

- and optimization in engineering design[C], Proceedings of the 12th International Conference on Human Computer interaction, 2007, 4553(4): 1075-1084
- [120] G. Grätzer. Lattice Theory: Foundation[M]. Basel: Springer, 2011: 1-108
- [121] 胡长流, 宋振明. 格论基础[M]. 开封: 河南大学出版社, 1990, 1-61
- [122] 中山正. 格的代数理论[M]. (董克诚). 上海: 上海科学技术出版社, 1964, 1-29
- [123] C. Simon, P. Weber. Imprecise reliability by evidential networks[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability, 2009, 223(2): 119-131
- [124] Y. J. Luo, Z. Kang, A. Li. Structural reliability assessment based on probability and convex set mixed model[J]. Computers and Structures, 2009, 87(21-22): 1408-1415
- [125] X. P. Du. Reliability-based design optimization with dependent interval variables[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012, 91(2): 218-228
- [126] Z. P. Qiu, D. Yang, I. Elishakoff. Combination of structural reliability and interval analysis[J]. Acta Mechanica Sinica, 2008, 24(1): 61-67
- [127] E. Benetto, C. Dujet, P. Rousseaux. Possibility theory: a new approach to uncertainty analysis?[J]. International Journal of Life Cycle Assessment, 2006, 11(2): 114-116
- [128] H. Z. Huang, L. P. He. New approaches to systems analysis and design: a review[M]. In: Handbook on Performability Engineering, London: Springer, 2008, 477-498
- [129] L. Du, K. K. Choi, B. D. Youn, et al. Possibility-based design optimization method for design problems with both statistical and fuzzy input data[J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2006, 128(4): 928-935
- [130] J. Zhou, Z. P. Mourelatos. A sequential algorithm for possibility-based design optimization[J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2008, 130(1): 011001.1-011001.10
- [131] G. C. Marano, G. Quaranta. A new possibilistic reliability index definition[J]. Acta Mechanica, 2010, 210(3-4): 291-303
- [132] Y. Pang, H. Z. Huang, N. C. Xiao, et al. Possibilistic reliability analysis of repairable system with omitted or delayed failure effects[J]. Eksploatacja i Niezawodnosc-Maintenance and Reliability, 2012, 14(3): 195-202
- [133] 刘普寅, 吴孟达. 模糊理论及其应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1998, 350-358
- [134] 佟欣. 基于可能性理论的模糊可靠性设计[D]. 大连: 大连理工大学, 2004, 16-23
- [135] L. A. Zadeh. Calculus of fuzzy restrictions[M]. In: Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, New York: Academic Press, 1975, 1-39

- [136] 任平, 招关仙. 可能性概念与可靠性分析[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(2): 11-15
- [137] 杨莉. 基于可能性理论的发电公司报价策略研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2004, 19-24
- [138] 戎翔, 左洪福, 张海军. 视情维修策略下的民航发动机拆换时间预测研究[J]. 机械科学与技术, 2008, 27(5): 583-587
- [139] H. E. Ascher. Repairable systems reliability[M]. In: Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability, Chichester: John Wiley, 2008, 1626-1630
- [140] Y. Liu, W. S. Tang, R. Q. Zhao. Reliability and mean time to failure of unrepairable systems with fuzzy random lifetimes[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2007, 15(5): 1009-1026
- [141] V. V. Krivtsov. Practical extensions to NHPP application in repairable system reliability analysis[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2007, 92(5): 560-562
- [142] L. Yuan, J. Xu. An optimal replacement policy for a repairable system based on its repairman having vacations[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2011, 96(7): 868-875
- [143] Y. L. Zhang, G. J. Wang. A deteriorating cold standby repairable system with priority in use[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 183(1): 278-295
- [144] Y. L. Zhang, S. M. Wu. Reliability analysis for a $k/n: (F)$ system with repairable repair-equipment[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(7): 3052-3067
- [145] Z. H. Zheng, L. R. Cui, A. G. Hawkes. A study on a single-unit Markov repairable system with repair time omission[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2006, 55(2): 182-188
- [146] 李红霞, 孟宪云, 李宁. 可忽略部分维修时间的串联可修系统的可用度分析[J]. 燕山大学学报, 2007, 31(6): 542-544
- [147] 吕佳. 故障影响忽略的串联和并联系统研究[D]. 西安: 西北大学, 2007, 24-33
- [148] Z. H. Zheng, L. R. Cui. Availability analysis of parallel repairable system with omitted failures[J]. Journal of Beijing Institute of Technology (English Edition), 2009, 18(1): 117-120
- [149] Z. Y. Jia, R. Kang, L. C. Wang, et al. Availability research on K -out-of- $N: G$ systems with repair time omission[J]. Advanced Materials Research (Materials and Product Technologies II), 2010, 118-120: 342-347
- [150] 郑治华. 故障影响忽略或滞后的单部件马尔可夫可修系统研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2006, 18-34
- [151] X. Z. Bao, L. R. Cui. An analysis of availability for series Markov repairable system with neglected or delayed failures[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2010, 59(4): 734-743
- [152] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 1986, 188-231
- [153] J. H. Cao, Y. H. Wu. Reliability analysis of a multi state repairable system with a replaceable

- repair facility[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1988, 4(2): 113-121
- [154] 毛勇, 李才良, 唐应辉. 修理延迟的单部件系统的可靠性分析[J]. *电子科技大学学报*, 2000, 29(5): 545-548
- [155] C. J. Savant, *Fundamentals of the Laplace Transformation*[M]. New York: McGraw-Hill, 1962, 23-69
- [156] D. Dubois, H. Prade. *Possibility Theory*[M]. New York: Plenum Press, 1988, 1-263
- [157] 李红霞. 可能性分布与 mass 函数[J]. *数学教学研究*, 2011, 3: 49-50
- [158] R. E. Barlow, F. Proschan. *Mathematical Theory of Reliability*[M]. New York: Wiley, 1965, 1-274
- [159] R. E. Barlow, F. Proschan. Importance of system components and fault tree events[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 1975, 3(2): 153-173
- [160] W. R. Blischke, D. N. P. Murthy. *Reliability: Modeling, Prediction, and Optimization*[M]. New York : Wiley, 2000, 31-63
- [161] 于凯. 一般多状态单调关联系统[J]. *自动化学报*, 1988, 14(4): 248-25
- [162] C. Singh. Cut set method for reliability evaluation of systems having s-dependent components[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 1980, R-29(5): 372-375

在学期间参与的项目研究

- [1] 国家自然科学基金项目：基于可能性和证据理论的机械系统可靠性分析和设计优化，项目编号：50775026
- [2] 国家 863 计划项目：数据不足时的重大装备可靠性分析与设计技术，项目编号：2007AA04Z40

在学期间发表和录用的学术论文

- [1] Y. Pang, H. Z. Huang, L. P. He, et al. Convex sublattice based reliability theory[J]. *Eksploatacja i Niezawodnosc-Maintenance and Reliability*, 2011, (3): 56-61. (SCI 检索)
- [2] Y. Pang, H. Z. Huang, N. C. Xiao, et al. Possibilistic reliability analysis of repairable system with omitted or delayed failure effects[J]. *Eksploatacja i Niezawodnosc-Maintenance and Reliability*, 2012, 14(3): 195-202. (SCI 检索)
- [3] 庞煜, 黄洪钟, 刘宇, 等. 多状态系统的可能可靠性分析[J]. *西安交通大学学报*. (已录用, EI 检索)
- [4] Y. Pang, H. Z. Huang, L. P. He, et al. Possibilistic reliability function analysis of multi-state systems[C]. *Proceedings of the 2012 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering (QR2MSE 2012)*, Chengdu, China, 2012, 1: 268-273 (EI 检索)
- [5] Y. Pang, H. Z. Huang, Y. Liu, et al. A systematic approach to the reliability analysis of an n-unit warm standby system with K-repair facility[C]. *Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computer and Information in Engineering Conference*, San Diego, USA, DETC2009-86995. (EI 检索)
- [6] Y. Pang, H. Z. Huang, Y. Liu, et al. Reliability analysis of a repairable parallel system with repair time omission[C]. *Proceedings of the 2009 International Conference on Reliability, Maintainability and Safety*, Chengdu, China, 2009, 41-45. (EI 检索)
- [7] G. L. Jiang, Y. Pang, Y. Liu. A network-based remote fault maintenance support system for logistics carrying vehicle. *Information*, 2012, 15(12(B)): 5569-5576. (SCI 检索)
- [8] L. P. He, H. Z. Huang, Y. Pang, Y. F. Li, Y. Liu. Importance identification for fault trees based on possibilistic information measurements. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* (已录用, SCI 检索)
- [9] N. C. Xiao, H. Z. Huang, Z. L. Wang, Y. Pang, L. P. He. Reliability sensitivity analysis for structural systems in interval probability form. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 44(5): 691-705. (SCI 检索)
- [10] Z. L. Wang, H. Z. Huang, Y. F. Li, Y. Pang, N. C. Xiao. An approach to system reliability analysis with fuzzy random variables. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 52(6): 35-46.

(SCI 检索)

- [11] L. P. Gan, Y. Pang, Q. Liao, N. C. Xiao, H. Z. Huang. Reliability sensitivity analysis for structural systems in interval probability form. Proceedings of 2011 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering, 2011: 195-202. (EI 检索, 国际会议)
- [12] L. P. He, H. Z. Huang, Y. Pang, Y. Liu, Z. L. Wang. Development of possibility distributions for fatigue lifetime data analysis. Proceedings of 2011 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering, 2011: 356-360. (EI 检索, 国际会议)