

论文题目 随机与认知不确定性下机械系统可靠性分析
与优化设计方法研究

学科专业 机 械 工 程

学 号 201411080102

作者姓名 张小强

指导教师 黄洪钟 教 授

分类号 TB114.3

密级

UDC ^{注1}

学 位 论 文

随机与认知不确定性下机械系统可靠性分析与优化设计方法研究

(题名和副题名)

张小强

(作者姓名)

指导教师	<u>黄洪钟</u>	<u>教 授</u>
	<u>电子科技大学</u>	<u>成 都</u>
	<u></u>	<u></u>
	<u></u>	<u></u>

(姓名、职称、单位名称)

申请学位级别 博士 学科专业 机械工程

提交论文日期 2018.04.17 论文答辩日期 2018.06.06

学位授予单位和日期 电子科技大学 2018 年 6 月

答辩委员会主席

评阅人

注 1：注明《国际十进分类法 UDC》的类号。

Reliability Analysis and Optimal Design Methods for Mechanical Systems Under Aleatory and Epistemic Uncertainties

A Doctoral Dissertation Submitted to

University of Electronic Science and Technology of China

Discipline: **Mechanical Engineering**

Author: **Xiaoqiang Zhang**

Supervisor: **Prof. Hong-Zhong Huang**

School: **School of Mechanical and Electrical Engineering**

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

作者签名： 张小强

日期：2018年6月28日

论文使用授权

本学位论文作者完全了解电子科技大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权电子科技大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后应遵守此规定）

作者签名： 张小强

导师签名：

黄晓华

日期：2018年6月28日

摘 要

随着航空航天、深海探测、轨道交通等现代工业技术的飞速发展,机械系统日趋大型化、精细化和复杂化。许多工程机械和武器装备的服役环境极其恶劣,加之各种不确定性因素的影响,导致各种故障频发,造成了许多灾难性的事故。良好的可靠性是保证系统发挥其应有功能的基础,然而,为节约成本或满足其它性能要求,还需对其进行轻量化设计,如汽车、高铁、飞机、卫星等。为同时满足高可靠、长寿命以及轻量化设计等要求,可靠性优化设计被越来越多地应用于复杂机械系统。复杂机械系统的可靠性优化设计需要解决几个关键问题:1)多源混合不确定性量化;2)复杂载荷作用下高精度可靠性评估;3)多状态系统可靠性评估;4)高效率的可靠性优化设计。基于传统应力-强度干涉理论建立的可靠性模型不能考虑机械系统在服役过程中载荷的作用历程,再加上机械系统在整个寿命周期内会受到较多不确定性因素的影响,已有的可靠性分析方法不再适用,研究新的动态可靠性分析方法迫在眉睫。因此,本文针对这几个关键问题,分别对复杂载荷下的动态可靠性模型、混合不确定性下的可靠性分析方法、考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法以及混合不确定性下的可靠性优化设计进行研究,以期对现有的动态可靠性模型及分析方法进行扩展和完善,为机械系统在服役期间内安全可靠运行、预防事故发生和降低成本提供理论基础和信息支撑。

本文的主要研究内容和创新成果包括以下几个方面:

(1) 提出复杂载荷及强度退化下的系统可靠性分析方法。本文考虑机械系统服役过程中冲击载荷、强度退化对其性能的综合影响,研究复杂载荷及强度退化下的系统动态可靠性模型与分析方法,提出考虑强度退化和冲击载荷作用的动态可靠性模型,并基于高斯-勒让德积分公式进行动态可靠度的相关计算,通过与蒙特卡洛仿真法的对比验证所提模型的有效性和精确性。

(2) 提出基于熵值不变的系统可靠性分析方法。在机械系统的设计过程中,受信息不全、数据不足以及其它不确定性因素的影响,往往较难获得某些变量的分布参数,而将其用模糊变量或区间变量进行描述。对于变量类型单一的模糊系统,其可靠性相关问题相对简单,可用水平截集、随机有限元等方法进行解决。在工程实际中,只存在单一类型变量的情况较少,不同类型变量混合的情况较多,因此,需对多种类型变量混合下的可靠性分析方法进行更深入的研究。本文基于熵理论,提出一种等价转换的方法,将模糊变量转化为正态随机变量,并结合鞍点近似法研究混合不确定性下的系统可靠性分析方法。

(3) 提出考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法。随着机械系统的大型化、复杂化及多功能化,某一零部件或子系统的失效通常仅引起系统性能的逐渐下降,而不会导致整个机械系统的失效,使系统性能呈现多态性。另一方面,在工程实际中,由于信息不全、数据不足或条件限制等,致使不能明确系统的性能水平,而仅能给出一个大概的范围。因此,对复杂机械系统的可靠性分析可视为多态系统的模糊可靠性分析。此外,组成系统的各个零部件或子系统之间往往相互关联,基于此,本文在模糊通用生成函数基础之上,引入系统主元件与其它元件间的主从关系,提出考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法。

(4) 提出模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计方法。目前,已有学者对混合不确定性下的可靠性优化设计进行研究,并得到了行之有效的处理方法,但针对模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计方法研究甚少,尚缺乏有效的处理手段。本文基于熵值不变的等效转换方法,将模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计转变成随机变量和区间变量混合下的可靠性优化设计,结合最坏情况理论,提出模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计新方法。

关键词: 动态可靠性, 多态系统, 模糊熵, 强度退化, 可靠性优化设计

ABSTRACT

With the rapid development of modern industrial technologies such as aerospace, deep-sea exploration and rail transit, mechanical products are becoming more and more huge, precise and complicated day by day. Many engineering machinery and weapons are subjected to extremely severe service environment, in addition to the effects of various uncertainties, which results in frequent breakdowns and has caused a lot of catastrophic accidents. High reliability is the basis for ensuring that the product can perform its proper function. In order to save costs or meet other performance requirements, lightweight designs for vehicles, high-speed trains, aeroplanes and satellites are also needed. To meet the design requirements of high reliability, long life and lightweight, reliability optimization design has increasingly applied to complex mechanical products. Several key problems need to be solved in the reliability optimization design of complex mechanical products, including 1) multisource mixed uncertainty quantification; 2) high precision reliability evaluation under complex loading; 3) reliability evaluation for multi-state systems; 4) efficient reliability optimization design. Reliability models established on the traditional stress-strength interference theory do not consider the effect of loading on mechanical products in the service, in addition, mechanical products are affected by many uncertainties during the whole life cycle, the existing methods of reliability analysis are no longer applicable, research on new dynamic reliability analysis method is urgent. Thus, in view of these key issues, this dissertation studies the dynamic reliability model under complex loading, the reliability analysis methods under mixed uncertainties, the fuzzy reliability analysis method for multi-state systems considering the correlation, and the reliability optimization design method under the mixed variables, respectively, to extend and improve the existing dynamic reliability models and analysis methods, and provide theoretical foundation and information support for the safety and reliability of mechanical system or mechanical products during the service, preventing accidents and reducing cost.

The main research contents and innovations of this dissertation are listed as follows:

(1) Development of a system reliability analysis method under the effects of complex load and strength degradation. This dissertation takes the comprehensive effects of shock load and strength degradation into consideration, studies the system dynamic reliability

model and analysis method under complex load and strength degradation, and sets up a dynamic reliability model considering complex load and strength degradation. Gauss-Legendre integral formula is used for the calculation of dynamic reliability, the validity and accuracy are verified with Monte Carlo simulation.

(2) Development of a system reliability analysis method based on entropy invariance. In the design process of mechanical products or systems, affected by incomplete information, insufficient data, and other uncertainties, it is often difficult to even cannot obtain the distribution types and distribution parameters of certain variables, but set them as fuzzy variables or interval variables. For reliability issues that only contain fuzzy variables, well-developed methods such as level cut sets, stochastic finite element can be used. In practical engineering, there are few cases where only fuzzy variable is present, and the opposite is often a mixture of variables. Thus, it is necessary to study the reliability analysis methods under mixed variables. This dissertation proposes an equivalent conversion method based on the theory of entropy, which can convert the fuzzy random variables to the normal random variables, and studies the system reliability analysis method under mixed uncertainties combined with saddlepoint approximation.

(3) Development of a fuzzy reliability analysis method for multi-state systems considering the correlation. With the large dimension, complication and multi-function of mechanical products, the fault of a certain part or subsystem usually does not lead to the failure of the whole mechanical products, but results in a decline in the performance of the products gradually, and presents polymorphism. On the other hand, in practical engineering, due to the limitations of conditions, insufficient data, or incomplete information, etc., people sometimes can only give rough ranges for the performance levels of the system and the corresponding probabilities. In addition, there is usually a connection between the components or subsystems that make up the system. This dissertation adds the correlation to fuzzy universal generating function, and proposes a new fuzzy reliability analysis method for multi-state systems considering the correlation.

(4) Development of a reliability optimization design method under the mixture of fuzzy and interval variables. At present, scholars have done some research works on optimization design under the mixed uncertainties, and obtained some effective methods, but there is little research on reliability optimization design method under the mixture of fuzzy variables and interval variables, and lack effective treatment methods. In this dissertation, reliability optimization design under fuzzy variables and interval variables

is converted to reliability optimization design under random variables and interval variables based on entropy invariability, and a new reliability optimization design method is proposed under the mixture of fuzzy variables and interval variables.

Keywords: dynamic reliability, multi-state system (MSS), fuzzy entropy, strength degradation, reliability optimization design

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 可靠性发展历程和研究现状	2
1.3 动态可靠性研究现状	4
1.3.1 动态可靠性理论	4
1.3.2 动态可靠性分析方法	6
1.4 多态系统可靠性研究现状	10
1.5 可靠性优化设计研究现状	11
1.5.1 混合不确定性下的可靠性优化设计	11
1.5.2 可靠性优化设计求解算法	12
1.6 论文主要研究工作	14
第二章 复杂载荷及强度退化下的系统可靠性建模与分析方法	17
2.1 应力-强度干涉理论	17
2.2 复杂载荷下考虑强度退化的动态可靠性模型	18
2.2.1 确定性退化下的动态可靠性建模	18
2.2.2 随机性退化下的动态可靠性建模	20
2.3 基于高斯-勒让德积分公式的动态可靠度计算方法	21
2.4 算例分析	24
2.5 本章小结	31
第三章 模糊变量和 p -box 变量混合下的系统可靠性分析方法	32
3.1 引言	32
3.2 p -box 变量及鞍点近似法	33
3.2.1 p -box 变量	33
3.2.2 鞍点近似法	34
3.3 基于熵值不变的等效转换方法	35
3.4 基于等效转换方法的可靠性分析方法	41
3.4.1 模糊随机变量向正态随机变量转换	42
3.4.2 随机变量和 p -box 变量拉丁超立方抽样	42
3.4.3 可靠度计算	44
3.5 算例分析	46

3.6 本章小结	49
第四章 考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法	50
4.1 引言	50
4.2 多态系统简介	51
4.3 考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法	53
4.3.1 模糊通用生成函数	53
4.3.2 考虑相关性的多态系统模糊可靠性建模与分析	54
4.3.3 模糊复合算子	59
4.4 算例分析	65
4.4.1 核电站供能系统模糊可靠性分析	65
4.4.2 矿用挖掘机推压机构液压子系统模糊可靠性分析	68
4.5 本章小结	73
第五章 模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计	74
5.1 引言	74
5.2 可靠性分析与优化设计	75
5.3 随机变量和区间变量混合下的可靠性优化设计	80
5.3.1 双环法	80
5.3.2 序列单环法	82
5.4 模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计	84
5.5 算例分析	86
5.5.1 十杆桁架结构可靠性优化设计	86
5.5.2 内燃机曲柄连杆机构可靠性优化设计	89
5.6 本章小节	95
第六章 总结与展望	96
6.1 本文主要研究结论	96
6.2 后续工作展望	97
致 谢	99
参考文献	100
攻读博士学位期间参与的科研项目及取得的成果	114

图目录

图 1-1 应力与强度在不同时刻的干涉情况.....	5
图 1-2 时不变可靠度与动态可靠度的区别.....	6
图 1-3 双环循环优化.....	14
图 1-4 论文结构框架.....	16
图 2-1 应力-强度干涉模型.....	17
图 2-2 复杂载荷及确定性强度退化下的应力-强度干涉.....	19
图 2-3 复杂载荷及随机强度退化下的应力-强度干涉.....	20
图 2-4 提升机构齿轮减速器.....	24
图 2-5 可靠度曲线.....	27
图 2-6 对应于不同初始强度的可靠度曲线.....	28
图 2-7 不同泊松强度下的可靠度曲线.....	28
图 2-8 不同方法对应的可靠度曲线.....	29
图 2-9 $\lambda(t)$ 以及不同泊松强度下的可靠度曲线.....	30
图 3-1 p -box 变量 $\bar{X}$ 的累积分布函数.....	33
图 3-2 基于等效转换方法的系统可靠性分析流程图.....	41
图 3-3 p -box 变量 $\bar{X}_i$ 的第 j 个样本.....	42
图 3-4 航空发动机涡轮盘示意图.....	47
图 3-5 采用不同方法得到的涡轮盘累积失效概率.....	49
图 4-1 二态系统和多态系统的性能累积分布.....	51
图 4-2 模糊性能水平与性能需求.....	56
图 4-3 考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析流程.....	58
图 4-4 模糊集 $\tilde{g}_i$ 的 α -水平截集.....	59
图 4-5 情形 2 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数.....	60
图 4-6 情形 4 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数.....	61
图 4-7 情形 6 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数.....	62
图 4-8 情形 7 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数.....	63
图 4-9 情形 8 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数.....	63
图 4-10 某小型核电站供能示意图.....	65
图 4-11 某矿用挖掘机推压机构液压子系统示意图.....	69
图 5-1 原始 $\mathbf{x}$ -空间.....	76

图 5-2 标准正态 $\mathbf{U}$ -空间.....	76
图 5-3 $\mathbf{U}$ -空间中 MPP 点示意图.....	78
图 5-4 FORM 与 SORM 近似	79
图 5-5 双环法实施流程图	81
图 5-6 改进后的双环法实施流程图	82
图 5-7 序列单环法的设计思想	83
图 5-8 序列单环法的运行流程图	83
图 5-9 第 k 个序列的确定性优化和可靠性分析	84
图 5-10 十杆桁架结构	87
图 5-11 某内燃机曲柄连杆机构	89
图 5-12 内燃机曲柄连杆机构运动简图	90
图 5-13 活塞所受推力 $\tilde{F}$ 的隶属函数	91
图 5-14 连杆弹性模量 $\tilde{E}$ 的隶属函数	91
图 5-15 连杆屈服强度 $\tilde{\sigma}_s$ 的隶属函数	92

表目录

表 2-1 高斯-勒让德积分节点和积分系数	22
表 2-2 提升机构齿轮减速器部分参数	25
表 3-1 不同情况下的最坏鞍点 ξ_s^{*worst}	45
表 3-2 不同情况下的最好鞍点 ξ_s^{*best}	46
表 3-3 涡轮盘参数	48
表 3-4 不同失效阈值下失效概率上界与下界	48
表 5-1 等价转换后十杆桁架不同优化算法的结果	88
表 5-2 随机变量分布类型及参数	90
表 5-3 区间变量的取值范围	92
表 5-4 等价转换后不同优化算法的结果	94

主要符号及缩略语

$L_o(\mathbf{C}, t)$	工作载荷随机过程
$S(\Phi, t)$	强度退化随机过程
L_s	冲击载荷
$L_{o+s}(\mathbf{C}, t)$	复杂载荷
$f_{L_{o+s}}(\cdot)$	复杂载荷概率密度函数
φ_0	初始强度
x_k	高斯-勒让德积分节点
A_k	高斯-勒让德积分系数
σ_H	赫兹接触应力
C_p	材料的弹性系数
K_v	速度因子
K_o	过载系数
K_m	安装系数
I	几何因素
α	分度圆压力角
T_{in}	驱动力矩
$\lambda(t)$	泊松强度
$K(t)$	冲击载荷在 t 时刻出现
$\bar{K}(t)$	冲击载荷在 t 时刻不出现
Δt	时间步长
$o(\Delta t)$	Δt 的高阶无穷小
$R(t)$	t 时刻的可靠度
$R(t + \Delta t)$	$t + \Delta t$ 时刻的可靠度
Z_s	矩母函数
$M(\xi)$	累积母函数
H_x	随机变量 x 的概率熵
$f_x(x)$	随机变量 x 的概率密度函数
$\mu_{\tilde{x}}(x)$	模糊变量 $\tilde{x}$ 的隶属函数
$G_{\tilde{x}}$	模糊变量 $\tilde{x}$ 的模糊熵
$\mu'_{\tilde{x}}(x)$	模糊变量 $\tilde{x}$ 的标准隶属函数

$\sigma_{X_{eq}}$	等价正态随机变量的标准差
X_n	模糊变量 $\tilde{X}$ 的名义随机变量
$\tilde{R}_f$	结构模糊可靠度
ξ_s^{*best}	最好情况下的鞍点
ξ_s^{*worst}	最坏情况下的鞍点
J	截面转动惯量
k_j	元件 j 的状态数
$\mathbf{g}_j$	元件 j 的性能水平集合
g_{ji}	元件 j 在状态 i 下的性能水平
g_i	系统在状态 i 下的性能水平
$p_{ji}(t)$	元件 j 在 t 时刻处于性能水平 g_{ji} 的概率
K	最大状态数
$\tilde{d}$	模糊要求
$\tilde{R}_i$	多态系统在状态 i 下模糊可靠度
$\tilde{R}$	多态系统模糊可靠度
$\mathbf{x}$	设计变量向量
μ_x	设计变量向量均值
$\Pr\{\cdot\}$	概率
$g(\mathbf{X})$	极限状态函数
$f_x(\mathbf{x})$	联合概率密度函数
$\mathbf{u}^*$	展开点
$\nabla g(\mathbf{u}^*)$	展开点梯度
$\mathbf{u}_{MPP}^R$	给定可靠度下的设计验算点
$\ \mathbf{u}\ $	向量 $\mathbf{u}$ 的长度
β	可靠性指标
$\Phi(\cdot)$	标准正态分布累积函数
R_i	第 i 个可靠度要求
$\mathbf{X}^{eq}$	等价正态随机变量向量
$\tilde{F}$	活塞所受模糊推力
$\tilde{E}$	模糊弹性模量
$\tilde{\sigma}_s$	模糊屈服强度
μ_k	滑动摩擦系数
F^{eq}	等价推力

E^{eq}	等价弹性模量
σ_s^{eq}	等价屈服强度
ρ	密度
L	杆长
N_i	各杆件受到的轴向力
σ_i	各杆件受到的应力
W	十杆桁架的总重量
S_i	各杆横截面积
SSI	应力-强度干涉 (Stress-Strength Interference)
MCS	蒙特卡洛仿真 (Monte Carlo Simulation)
IMCS	区间蒙特卡洛仿真 (Interval Monte Carlo Simulation)
SPA	鞍点近似 (Saddlepoint Approximation)
p -box	概率盒 (Probability Box)
MSS	多状态系统 (Multi-State System)
FUGF	模糊通用生成函数 (Fuzzy Universal Generating Function)

第一章 绪 论

1.1 研究背景及意义

可靠性是衡量机械产品质量特性的重要指标之一，已贯穿到机械零部件、复杂机械装备、大型基础设施全寿命周期内的各个阶段，包括设计、制造、试验、使用、维修保养等^[1]。准确评估大型复杂机械装备和工业系统的可靠性，不仅能对整个装备和系统的运行安全实施保障，还能为维修计划的制定提供信息指导，以降低全寿命周期费用。科技的迅猛发展和社会的飞速进步，使机械产品结构更趋复杂、使用场所更加广泛、工作环境更为严酷，因此，可靠性在机械产品质量特性中的地位也更加凸出。

进行复杂机械系统的可靠性评估与优化设计涉及不确定性量化、失效机理分析、动态可靠性评估以及多学科协同设计优化等重要内容。由于复杂机械系统结构的复杂性、工况（振动、冲击、高温）的复杂性，复杂机械系统面临的不确定性的来源和类型也更趋复杂。根据信息所包含的内容，机械系统设计中存在的不确定性不仅包含某些未来事物的随机不确定性，而且包含客观事物的模糊不确定性及主观认识的未确知性。不确定性大致可分为随机不确定性（Aleatory Uncertainty）和认知不确定性（Epistemic Uncertainty）两种^[2-4]。复杂的不确定性是影响复杂机械系统高置信度（High Confidence）评估和优化设计的根本原因。传统的概率（随机）可靠性方法采用概率论或随机过程描述不确定性，可有效处理随机不确定性问题，但是对于复杂机械系统，概率方法所要求的两个基本假设（概率假设、二值状态假设）^[5]和四个前提（事件定义明确、大量样本存在、样本具有概率重复性并具有较好的分布规律、不受人为因素的影响）^[6]很难得到满足。因此，研究多源混合不确定下的可靠性评估方法成为复杂机械系统可靠性优化设计的热点问题。

受载荷随机性、任务多阶段性、材料性能退化等因素的影响，机械结构或系统的可靠性在寿命周期内是一个动态时变的指标。基于应力-强度干涉理论，众多学者针对考虑载荷作用次数、载荷历程、性能退化的可靠性分析等方面做了大量的研究工作，也提出了较多行之有效的方法，但对混合不确定性下综合考虑复杂载荷作用历程和强度退化的可靠性分析研究尚未涉及。

复杂机械系统的优化设计涉及多个子系统间的交互、多学科间的耦合，属于复杂的非线性问题。加之混合不确定性的存在，使机械系统优化设计的求解变得更加困难。

综上所述，研究机械系统的可靠性分析方法和可靠性优化设计方法意义重大。

本文在国家自然科学基金“不确定结构可靠寿命设计的时变高精度模型和序列优化问题研究”以及国家高技术研究发展计划项目（863 计划项目子课题）“大型挖掘机可靠性分析及设计的关键技术研究”等基金与项目的资助下，对机械结构或系统的可靠性分析方法及可靠性优化设计方法进行深入研究，以期拓展和完善现有的可靠性分析方法以及可靠性优化设计方法。

1.2 可靠性发展历程和研究现状

可靠性工程起源于二十世纪四十年代，当时正值第二次世界大战，航空工业产品、电子产品、武器装备等需求量剧增，这些产品在使用过程中暴露出大量的问题，其中可靠性问题尤为突出，因产品不可靠而造成的人员伤亡和经济损失难以估量，在此情形下，可靠性工程应运而生。据不完全统计，第二次世界大战期间，美国空军在实战中被击落的飞机约 14000 架，而因可靠性问题所损失的战机数比这一数目还多 0.5 倍；运往远东作战的飞机在储备期间有近 50% 发生失效；轰炸机的平均无故障失效时间（Mean Time Between Failure, MTBF）不足 20h；同时，电子设备故障频发，如 70% 左右的舰艇电子设备在使用过程中失效。这些数据让美国军方触目惊心，引起他们的高度重视，从而投入大量物力、财力，召集相关科研人员着手研究这些事故的发生规律，进而提出可靠性的概念。随后，美国军方、工业部门及相关学术部门联合成立了电子设备可靠性咨询委员会（Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment, AGREE），此举对可靠性的发展具有重要意义。同年，AGREE 首次对可靠性进行了科学的定义，即产品在规定的条件下和规定的时间内，完成规定功能的能力。紧接着，该委员会对电子产品在寿命周期内各环节的可靠性问题进行了较为全面的调查和研究，并据此发表了《军用电子设备的可靠性》报告，从理论基础和研究方法两方面对可靠性进行了较为全面的论述，因此，该报告被公认为是可靠性领域的奠基性文件。此后，世界各国相继开展了可靠性的相关研究，随着研究的不断深入，一门新兴的学科——可靠性工程得以形成。

美国作为发达国家，对可靠性技术研究较早，并成功将其应用于工程实际。与此同时，苏联运用大量的可靠性知识来保障人造地球卫星的成功发射与在轨运行。在日本，部分企业家意识到，要想在国际市场竞争中取胜，必须进行可靠性研究。1958 年，日本科学技术联盟成立了“可靠性研究委员会”，并举办可靠性培训班。期间，由于各国对可靠性的基本定义不同，再加上用语和数据收集方式等也存在区别，严重阻碍了可靠性技术在国际间的传播和交流，为此，国际电子技术委员会（International Electrotechnical Commission, IEC）专门设立了可靠性技术委员会。

国内的可靠性研究工作最早由电子工业部门开展。二十世纪五十年代，我国首

先在广州建立了亚热带适应性试验基地，随后创建了电子产品可靠性与环境试验研究所。七十年代后期，掀起了电子产业蓬勃发展的浪潮，电子产品在使用过程中暴露出大量问题，如何提高家用电子产品质量成为消费者关注的焦点，同时也是企业提升品牌影响力和抢夺市场的关键，这在一定程度上推动了国内的可靠性研究。例如 1978 年，为对电子元器件实施全面质量管理，我国要求电视机、收音机、洗衣机等电子产品的可靠性、安全性需满足《电子产品可靠性“七专”质量控制与反馈科学实验》计划的相关规定，并在全国范围内对整机及元器件生产厂的相关技术人员进行可靠性知识培训。经过五年的努力，使电视机的 MTBF 由原来的 300h 提高到 3000h，极大地推动了电子元器件和整机的可靠性发展。这也大大促进了军用电子产品可靠性的提升，从而为军用卫星的成功发射、战斗机的安全巡航及军用雷达、核潜艇等的正常运行提供保障。1984 年，国防科工委立足于基本国情，积极学习和引进发达国家的先进可靠性技术，颁布了一系列可靠性标准，包括军用标准、企业标准和专业标准等。为预测航空技术装备寿命，提高其可靠性，国防科工委还颁发了《航空技术装备寿命与可靠性工作暂行规定》，至此，可靠性在我国航空工业中的应用进入到一个全新的阶段。为管理军工产品质量，进一步提升其可靠性和安全性，国务院和中央军委明确规定军工产品在设计、制造、试验等过程中要运用可靠性技术，并颁发了《军工产品质量管理条例》。此后，国家还先后颁发了国家军用标准 GJB368-87《装备维修性通用规范》和 GJB450-88《装备研制与生产的可靠性通用大纲》。至此，我国的可靠性管理工作正式进入标准化轨道。另外，产品可靠性与安全性引起了国防、民用航空、工业与信息化等多个部门的高度重视，不仅加强可靠性数据的采集，而且积极组织各种可靠性学术活动。与此同时，全国各地也纷纷成立不同级别的可靠性学会，这进一步促进了可靠性理论研究成果在工程实际中的应用。

二十世纪七十年代末到八十年代初，是我国可靠性研究工作的第一个高潮时期。二十世纪九十年代初，机械工业部提出了“以科技为先导，以质量为主线”的思路，提倡企业应注重产品的质量效益，将质量与先进科技相结合，该思路直接推动我国可靠性研究工作进入第二个高潮时期。进入 21 世纪以来，国外发达国家将可靠性研究工作提高到保护资源和节约能源的高度，并将可靠性技术贯穿于机械零部件、复杂机械装备、大型基础设施等全寿命周期内的各个阶段。我国也先后实施了一系列重大科技战略以推进可靠性理论研究，加强其在实际工程中的应用。在 2011 年公布的《国家“十二五”科学与技术发展规划》中，提出要将数控机床主机可靠性提高 60% 以上。在《中国工程机械行业“十二五”规划》中，提出了“加强产品可靠性共性技术研究”的要求。在《内燃机工业“十二五”发展规划》中，

对发动机以及增压器等产品提出了量化的可靠性指标要求。2001 年，我国加入世界贸易组织（World Trade Organization, WTO），经济与市场逐渐国际化，各企业鉴于产品可靠性在市场竞争中的重要地位，也纷纷开展了可靠性研究。

可靠性的研究起源于军事领域，但随着社会的进步与科学技术的发展，可靠性已延伸到各个方面，反应在国民经济的各个部门和领域，不仅给企业带来了丰厚的经济效益，而且也产生了巨大的社会效益。现今，可靠性已成为众多工程领域，如机械、建筑、通信、轨道交通、航空航天、水利水电、化工石油等所关心的重要问题之一，可靠性技术也已成为工程设计、经营决策、产品维修等一系列工作中不可或缺的工具。

可靠性的理论研究与实际应用总体上可分为四个阶段，即可靠性萌芽、可靠性初步发展、可靠性工程技术形成及可靠性技术广泛应用。可靠性源于电子产品，早期多为理论研究和定性分析，如今已应用于机械设备的研制、使用与维修保养，且能进行精确的定量分析。由于各行业本身具有差异，对于不同工程领域，其可靠性问题也不同，例如，软件系统与硬件系统、机械设备与电子产品、深空探测与海洋工程等，均存在不同的可靠性问题。随着可靠性问题的日益凸出，不仅在电子产业中需进行可靠性研究，也需对非电子产品（如机械设备）进行可靠性研究。机械产品结构复杂，同时，由于工况、载荷的多变性，常造成疲劳、磨损、蠕变、断裂等多种失效模式，因此，机械产品的可靠性研究在基础理论和工程应用等方面仍需进行进一步研究。

1.3 动态可靠性研究现状

1.3.1 动态可靠性理论

动态性体现了系统性能随时间的变化，是现代复杂系统可靠性的重要特征之一。零部件或系统在服役过程中，其工作时间、载荷作用次数、应力循环次数等寿命指标均会不断变化，进而对运行工况、应力或载荷以及强度等参数造成影响。工程实际中，强度和应力（或载荷）的不确定性、载荷历程的变化、强度退化以及由载荷不确定性所产生的累积效应等，都会影响应力（或载荷）与强度之间的相对大小关系，从而使机械零部件和系统的可靠性呈现动态性。在整个服役期间内，复杂机械系统的可靠性会随着时间的推移而发生变化，传统可靠性理论与方法大多只能对静态可靠性进行分析和评估，而无法对动态性进行较好地描述，因此，很难准确反映系统可靠性随寿命指标的变化规律。如图 1-1 所示，即使在应力概率分布不发生改变的情况下，由于强度的退化，应力与强度之间的干涉情况也会随着时间的推移而逐渐变化，从而导致可靠性不断发生改变。图 1-1 中， $\delta(t)$ 和 $s(t)$ 分别代表

强度和应力的概率密度函数。

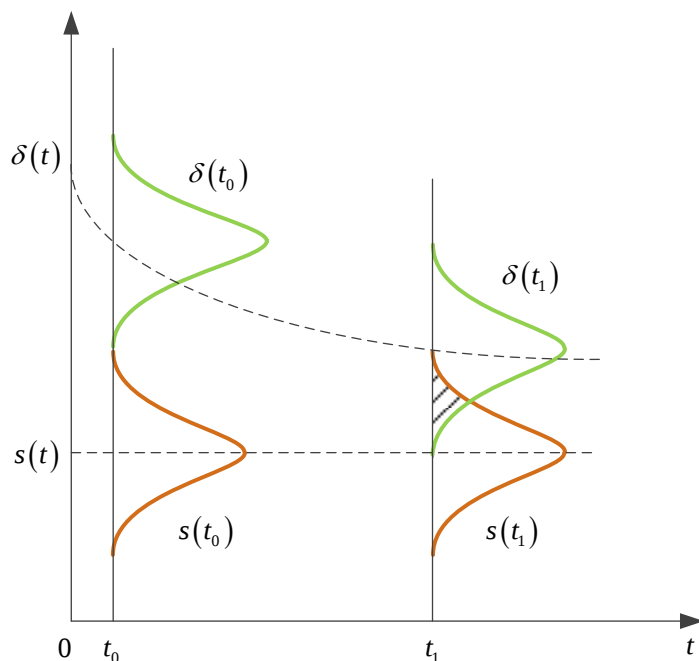


图 1-1 应力与强度在不同时刻的干涉情况

由于传统的可靠性理论存在着缺陷，再加上动态可靠性可实时反映零部件或系统的质量特性变化，动态可靠性理论应运而生并逐渐发展，引起了学术界和工业界的广泛重视。李艺和闫运起^[7]将机械结构受到的外部载荷和结构自身的强度视为两个随机过程，基于应力-强度干涉理论，得到式(1-1)所示结构功能函数。

$$Z(t) = g(R(t), S(t)) = R(t) - S(t) \quad (1-1)$$

式中， $Z(t)$ 为功能函数， $R(t)$ 为结构强度， $S(t)$ 为外部载荷。

O'Connor 和 Kleyner^[8]假设系统受 n 次相同载荷作用，且这 n 次载荷之间两两独立，推导了 n 次相同载荷作用下的可靠度计算模型为：

$$R^{(n)} = \int_0^{+\infty} f_{\delta}(\delta) \left[\int_{-\infty}^{\delta} f_s(s) ds \right]^n d\delta \quad (1-2)$$

式中， n 为载荷次数， $f_{\delta}(\delta)$ 和 $f_s(s)$ 分为强度变量概率密度函数和载荷变量概率密度函数。

式(1-1)所代表的这类动态可靠性模型，直接用 t 时刻的强度与 t 时刻的应力（或载荷）的干涉情况来计算零部件或系统的可靠度，仅能反映 t 时刻的强度与 t 时刻出现的应力（或载荷）相对大小关系的概率特征，因此，其计算结果实际上是默认零部件或系统在时间段 $[0, t - \Delta t]$ （ Δt 为时间的微小增量）内不发生失效情况下 t 时刻的可靠度，即为条件可靠度。也就是说，通过式(1-1)计算得到的 t 时刻可靠度是基

于零部件或系统在 $[0, t - \Delta t]$ 时间段内可靠度为 1 这一假设条件, 因而不能反映 $[0, t - \Delta t]$ 时间段内的失效情况以及载荷历程、强度退化规律等对 t 时刻可靠度所造成的影响。因此, 文献[9]把通过这类可靠性模型计算得到的可靠度称为“时不变可靠度”。式(1-2)虽然考虑了载荷作用次数的影响, 但仅能对强度不发生退化时的可靠度进行计算。时不变可靠度与动态可靠度之间的区别如图 1-2 所示。

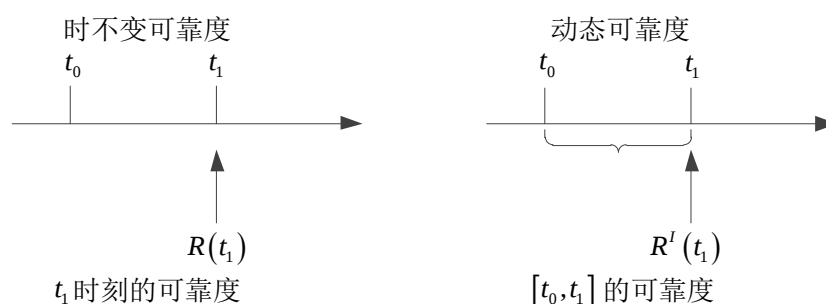


图 1-2 时不变可靠度与动态可靠度的区别

1.3.2 动态可靠性分析方法

动态可靠性分析方法可分为两大类:

(1) 基于概率的可靠性方法。

基于概率的可靠性方法可有效处理动态不确定性问题, 然而, 该类方法需要事先知道概率密度函数并假设系统满足二值状态, 而且要求时间的定义比较明确、样本量大以及不受人为因素影响等, 然而这些前提条件或假设在复杂机械系统中往往难以得到满足。近年来, 无论是动态可靠性的理论建模、评估方法、优化设计方面, 还是工程实际的应用, 国内外学者都做了大量工作。Rice^[10]提出首次穿越公式, 奠定了首次穿越破坏的动态可靠性理论基础。应用首次通过公式计算动态可靠度时, 积分较为复杂而难以计算, 因此, 首次通过公式仅为概念意义上的方法, 无法应用于工程实际。随后, Siegert^[11]提出一种新方法, 对响应为连续马尔可夫过程的结构进行首次通过概率的计算。Helstrom 和 Isley^[12]推导了马尔可夫包络过程下首次通过时间的解析解。然而, 以上两种方法仅适用于特殊的极限状态函数。Coleman^[13]针对首次通过频率的计算提出泊松近似, 建立了穿越率和结构动态可靠性之间的桥梁, 但是, 该方法仅在结构响应从安全状态穿越到失效状态属于偶然事件, 且各穿越之间相互独立时计算精度较高。Crandall 等^[14]采用数值仿真的方法解决首次通过问题。Spanos 和 Kougiumtzoglou^[15]应用首次通过方法处理随机激励下的小阻尼非线性振荡器。徐明^[16]研究了非弹性碰撞振动系统的首次穿越。Breitung^[17]、Schall 等^[18]、Engelund 等^[19]、 Rackwitz^[20]和 Melchers^[21]也均采用穿越率法求解载荷随时间变化的动态可靠性问题。Hu 和 Du^[22]采用联合穿越率对动态

可靠性分析提出一种更精确的计算方法,该方法能弱化穿越间相互独立的假设。Andrieu-Renaud 等^[23]提出应用 PHI2 方法来计算穿越率,该方法能使动态可靠性的计算变得更加简单,也更易于理解,但对某些复杂或非平稳问题,其计算效率却大大降低。Jiang 等^[24]提出了一种新的基于随机过程离散化的动态可靠性分析方法,该方法为复杂结构全寿命周期内的可靠性评估提供了较为有效的分析工具。Hu 和 Mahadevan^[25]构建了一种等价高斯随机场,并采用随机场离散化的方法来进行动态可靠性分析。Wang 和 Wang^[26]采用嵌套极值响应面技术建立一种基于动态可靠性的设计优化方法,该方法能解决动态可靠性分析在计算效率上的困难,但是,对于所建立的响应面有时难以保证较好的精度。林小燕^[27]对采煤机摇臂齿轮系统进行了动态可靠性研究。Li 和 Mourelatos^[28]采用小生境遗传算法计算动力问题的动态可靠度。Singh 等^[29]提出重要度采样的动态可靠性分析方法。单晓芳^[30]对供热管网进行了动态可靠性建模与仿真分析。Czarnecki 和 Nowak^[31]基于动态可靠性理论,推导出腐蚀条件下的钢架桥评价模型。张红旗等^[32]针对机电装备运行维护问题,提出基于部分可观察马尔可夫决策过程理论的动态可靠性评价方法。Breitung 和 Rackwitz^[33]采用最大局部穿越密度线性化的方法研究系统在动态随机过程下的可靠性,并获得了足够精确的分析结果。之后, Breitung^[17, 34-35]又进一步地对不确定性因素为平稳高斯过程、非平稳高斯过程以及泊松矩形波更新过程等情况进行细致的研究,并通过计算得到动态可靠性的近似解。高明君等^[36]在机构综合法分析的基础上,同时考虑机构运动可靠性分析中强度退化的时变性和模糊性,提出基于广义强度退化的机构模糊时变可靠性建模方法。Cazuguel 等^[9]和 Andrieu-Renaud 等^[23]对动态可靠度计算公式进行推导,并分析了动态可靠度和某一时刻点可靠度的关系。丁飞^[37]基于应力-强度干涉理论,建立液压支架结构疲劳动态可靠性分析模型,并结合使用现场实测压力数据与液压支架生产企业再制造情况,对某常用液压支架进行动态可靠性评估。Li 等^[38]采用多输入多输出支持向量机模型对包含多个极限转态函数的结构进行可靠性分析。Zhang 和 Du^[39]假设动态不确定性因素为一非平稳高斯过程,并结合首次穿越率平均值方法,求解机械运动位置的动态可靠度。Sudret 和 Kiureghian^[40]假设随机有限元方法的穿越次数相互独立且服从泊松分布,并进行推导得到穿越率的计算公式。Sørensen^[41]较为详细地总结了结构可靠性分析成果,包括动态可靠性分析的相关研究。Royset 等^[42]通过对目标函数和概率约束条件的近似求解动态可靠性。Li^[43]在融合遗传算法和可靠性分析方法基础上,对系统动态可靠性设计问题进行深入研究。Andrieu-Renaud 等^[44]针对动态可靠性问题提出更为精确的 PHI2 方法。Sudret^[45]在 PHI2 法的基础之上,通过进一步分析和推导,得到计算动态可靠性更精确的穿越率解析展开法。Wang 等^[46]提出一种基于仿

真的方法来估计动态系统两种不同类型的动态失效率。Mourelatos 等^[47]采用全概率理论和复合极限状态概念,对动态问题提出一种新的可靠性分析方法。Torres 和 Ruiz^[48]假定结构性能参数随时间的变化为线性退化,提出考虑性能退化的结构动态可靠性分析方法。欧进萍^[49]研究了多自由度结构体系的动态可靠性分析问题。Zhang 等^[50]通过响应面法对随机载荷下的不确定结构进行动态可靠性分析。Hu 和 Du^[51]通过抽样方法得到随机过程的极值分布,该方法能有效地计算动态可靠度,但对多随机过程等比较复杂情况下的问题,无法用该方法进行解决。Wang^[52]等将高维随机过程划分为一系列相关的、短持续时间的、低维度的随机过程,提出一种改进的子集模拟采样方法。Becker 等^[53]建立结构可靠度状态模型,考虑离散状态转移过程中的不确定性,提出一种新的基于马尔可夫链的动态可靠性分析方法。黄飞腾等^[54]先将系统状态进行适当的离散化处理,然后利用马尔可夫链状态转移法对系统性能进行描述,最后对水位调节系统的动态可靠性进行分析。Streicher 和 Rackwitz^[55]基于 Rosenblatt 变换,采用一阶矩法对标准化空间下独立串联结构的动态可靠性优化方法进行研究。Tian 和 Noore^[56]研究了软件的动态可靠性预测模型。王新刚等^[57]研究机械零件强度以及载荷随时间的变化规律,并建立变幅随机载荷和强度退化下的动态可靠性分析模型。Kopustinskas 等^[58]基于随机微分方程建立新的动态可靠性模型,对事故检测系统的可靠性和风险性进行分析,并将结果与采用传统故障树方法得到的结果进行对比,以验证新模型的有效性。苏春等^[59]鉴于 Petri 网的优良特性,将 Petri 网与可靠性分析相结合,提出随机故障 Petri 网的动态可靠性建模方法,从而解决了复杂系统动态可靠性建模困难的问题。最近, Zayed 等^[60]采用快速积分技术对船舶结构进行动态可靠度评估。Wang 和 Wang^[61]提出基于信赖度的元模型方法进行高效无灵敏度的动态可靠性分析。Park^[62]推导了失效相关下无线网络的动态可靠度。Xiao 等^[63]提出一种新的基于自适应代理模型的高效可靠性分析方法。Yu 等^[64]考虑时间顺序和失效过程相关性,对包含不确定性的下肢外骨骼提出一种序列动态可靠性分析方法。

在基于概率的可靠性方法中,根据构成性能函数的广义应力和广义强度的时间相关性不同,可将其划分为“全随机过程模型”和“半随机过程模型”。“全随机过程模型”是指广义应力和广义强度均为随机过程,适用于随机载荷和结构强度均与时间相关的情形;而“半随机过程模型”是指广义应力和广义强度中只有一个为随机过程,主要适用于动态随机载荷下的结构可靠性分析。“全随机过程模型”和“半随机过程模型”均属于动态可靠性理论的范畴。针对动态可靠性分析,国内外学者从解析的角度开展了大量的研究工作,相应地取得了丰富的研究成果,包括性能函数极大转换法^[65]、蒙特卡洛仿真法^[66-67]、极值分布法^[68]、复合极限状态法^[69]、

摄动法^[70]、重要度抽样法^[71-72]、复合随机过程法^[73]以及穿越率法^[10]等。

针对已有方法,目前形成了一种接受度较高的看法,即性能函数极大转换法在处理“半随机过程模型”时具有较好的适用性,而在处理“全随机过程模型”时将产生较大的计算近似误差;极值分布及复合随机过程法需要假定系统参数或性能服从特定的分布,将产生模型近似误差;复合极限状态法在处理非线性程度较高的性能函数时,将产生无法接受的误差;摄动法对系统参数有着较强的依赖性;相对其他方法,穿越率法在计算效率方面表现出巨大的优势,备受学术界和工业界的关注。穿越率法主要包括:可微高斯过程法^[74],矩形波更新过程法^[33],拉普拉斯积分法^[60],PHI2 方法^[23],PHI2+方法^[45]。鉴于近似时间积分的复杂性和泊松分布假设,可微高斯过程法、矩形波更新过程法、拉普拉斯积分法只能处理特定随机过程条件下的穿越率计算问题,且计算精度不高。PHI2 和 PHI2+方法利用并联系统可靠性框架来提高计算精度以及扩宽穿越率计算方法的适用范围。但现有研究表明:在处理非单调性系统时,基于并联系统可靠性框架的穿越率计算方法显现出较低的计算精度^[75]。除上述方法,蒙特卡洛仿真也是求解结构或系统可靠性常用方法之一。该方法原理简单、通俗易懂、求解方便,常用作对比基准以确定其它方法的误差,但是在对失效概率较小的机械结构或系统进行可靠性分析时,该方法计算量通常较大,从而一定程度上限制了其应用。基于时间序列随机过程离散化,将动态可靠性问题通过离散转化,变成常规高维时不变可靠性问题是处理动态可靠性问题的另一条途径。采用常用的时不变可靠性分析方法,如 FORM (First Order Reliability Method, FORM)、SORM (Second Order Reliability Method) 等,有时很难甚至无法进行性能函数为高维、高度非线性时的可靠性分析。重要度抽样法在处理高维性能函数时存在着两方面的不足:一方面,重要度抽样密度的选择需要失效域的相关信息;另一方面,对高维性能函数,往往无法给定合适的重要度抽样密度。子集模拟是最近出现的高可靠性精确评估的有效方法,越来越受到学术界和工业界的关注^[76]。基于马尔可夫链蒙特卡洛的子集模拟法 (Subset Simulation with Markov Chain Monte Carlo, SS/MCMC) 和基于分支的子集模拟法 (Subset Simulation with Splitting, SS/S) 是子集模拟法的典型代表^[77]。SS/MCMC 是一种通用方法,可以处理时不变可靠性和动态可靠性问题;而 SS/S 只能处理动态可靠性问题。在相同有效样本情况下,SS/MCMC 和 SS/S 具有相似的精度。但 SS/S 产生的样本均为有效样本,而 SS/MCMC 产生的样本只有部分为有效样本。因此,在相同精度情况下,SS/S 具有更高的计算效率。但目前的 SS/MCMC 和 SS/S 方法主要适用处理单点可靠度分析问题。

(2) 基于非概率的可靠性方法。

基于非概率的可靠性方法包括区间分析、凸集模型、证据理论等。张浩浩^[78]基于区间分析方法,以非概率鲁棒可靠性分析理论为基础,对发动机性能的可靠性评估理论和方法进行了研究。郭书祥等^[79]基于区间分析,提出了非概率可靠性的一种全新度量方法。Du^[80]研究了随机变量和区间变量混合下的可靠性分析方法。毕仁贵^[81]研究了考虑相关性的不确定凸集模型与非概率可靠性分析方法。Meng 等^[82]提出了一种超参数凸模型,并将其应用于非概率的可靠性设计优化。张哲^[83]提出了基于响应面技术的证据理论可靠性分析方法,并对五自由度单轨车辆振动模型的可靠性进行了分析。Guo 等^[84]基于证据理论,对传统问题中的传感器可靠性评估提出了一个新的框架。由于基于非概率的可靠性方法不能充分利用设计过程中的各类信息,通常会导致最终的设计结果偏于保守,因此,该类方法在应用上受到了很大的限制。

1.4 多态系统可靠性研究现状

多态系统能反映系统或元件的多态性,Hirsch 等^[85]首次提出多态系统这一概念,随后,多态理论被应用到单调关联系统中^[86-87]。目前,针对多态系统的可靠性研究,已引入和发展了多种技术和方法。Lisnianski 和 Levitin^[88]将多态系统的可靠性分析方法分为了四类,Gu 和 Li^[89]对已有的多态系统可靠性评估方法进行介绍,并将前述的四类可靠性分析方法扩展为五类,即:a)布尔模型扩展方法,如二元决策图、多态故障树、多态路集、多态割集等;b)随机过程方法,包括基于马尔可夫过程、半马尔可夫过程以及马尔可夫再生过程的方法;c)蒙特卡洛仿真;d)通用生成函数(Universal Generating Function, UGF)方法或者基于 UGF(UGF-based)的方法;e)递归算法。Caldaralar^[90]为多态系统的每个元件分配一个布尔变量,据此可将多态系统简化为二态系统。Zang 等^[91]提出二元决策图方法以实现布尔代数。Huang^[92]对传统故障树模型进行改进和扩展,提出多态故障树模型以契合多态关联系统的特性。随后,刘晨曦等^[93]和王宁^[94]对多态故障树进行进一步扩展以适用多态非关联系统。Zhou 等^[95]提出一种转换方法,将多态故障树转化为基于贝叶斯网络的多态故障树。Hsieh 等^[96]基于马尔可夫过程,建立了多态退化系统的可靠性评估模型。Dascalu 和 Ionescu^[97]研究了多态系统的维修决策,并给出相应的解决方案。Frenkel 等^[98]提出一种半马尔可夫过程方法以满足多态系统的可靠性分析与评估。为解决多态系统中的预防性维修问题,Chen 等^[99]对马尔可夫过程进行改进,提出了基于马尔可夫再生过程的可靠性分析方法,但该方法较为复杂,不易广泛使用。Fishman^[100]应用蒙特卡洛仿真方法处理多态系统的可靠性分析问题,但计算量较大。Ushakov^[101]将生成函数扩展为通用生成函数。随后,Levitin 等^[102-103]、

Lisnianski 和 Ding^[104]分别将通用生成函数方法引入到可靠性分析领域中。基于通用生成函数的可靠性分析方法计算较为简便, 准确度也较高, 因此, 受到众多学者的青睐并得以广泛应用。Levitin 等^[102]通过通用生成函数方法对多态串并联系统进行了冗余优化。随后, Levitin^[103]又采用通用生成函数方法对含有两种失效模式的多态系统的可靠性进行评估。同时, Lisnianski 和 Ding^[104]联合随机过程方法与通用生成函数方法来计算多态系统的可靠度。Ding^[105]利用模糊通用生成函数对多态系统的可靠性进行评估。Zuo 和 Tian^[106]提出一种递归方法用以评估广义多态 k/n 系统的可靠性。Li 和 Zuo^[107]扩展了两种多态加权 k/n 系统, 针对这两种系统, 提出应用递归算法来评估可靠性。Sharma 等^[108]针对多态串并联系统中的异构冗余分配问题, 提出一种在给定可靠性约束条件和负载要求下的可靠性优化设计方法。Levitin 和 Xing^[109]对包含共因失效的复杂串并联多态系统进行研究, 提出多态系统性能分布的计算方法。

综上, 针对多态系统, 目前已取得了大量的研究成果。但这些研究方法中, 大部分都认为构成多态系统的元件或子系统之间相互独立, 很少考虑它们之间的相关性, 即便是考虑了相关性, 大多数多态系统可靠性分析方法也仅针对共因失效情况。随着机械系统的大型化、复杂化, 构成多态系统的各元件或子系统间的相互关系也愈加复杂, 因此需要对考虑相关性的多态系统可靠性分析方法进行更深入的研究。

1.5 可靠性优化设计研究现状

1.5.1 混合不确定性下的可靠性优化设计

不确定性通常可分为两类: 随机不确定性和认知不确定性^[110-112]。随机不确定性问题可用概率论加以处理, 而认知不确定性问题, 通常用区间数、概率盒 (Probability Box, p -box) 以及模糊集等进行建模。现如今, 已有多种理论和方法, 如区间概率^[113]、可能性理论^[114-115]、证据理论^[116]、模糊集^[117]、凸模型^[118-120]以及贝叶斯方法^[121], 可用来处理认知不确定性问题。

在工程实际设计中, 有些不确定性变量无法用特定的概率分布加以精确描述, 而仅知其取值位于某一给定的区间。目前, 部分学者认为“不确定性可以用区间来描述”, 在实际情况中, 某些不确定性变量的特征与区间变量的特征较为相似, 因此, 将这类不确定性变量描述为区间变量是可以接受的^[122]。除区间变量之外, 往往还存在另外一些不确定性变量, 其概率特征也无法用特定的概率分布加以精确描述。受信息不全、数据不足、人类知识水平及认识有限等影响, 这些不确定性变量的取值为模糊值, 通常将这类不确定性变量称为模糊变量。

对区间或模糊可靠性问题, 已取得了大量的研究成果。Pownuk^[123]、Modares 等^[124]、Pereira 等^[125]分别研究了区间有限元方法。Hall 和 Lawry^[126]采用模糊集处理区间变量, 对工程中系统失效的不精确概率进行研究。Penmetsa 和 Grandhi^[127]采用函数逼近法评估含有区间不确定性的结构可靠性。Bae 等^[110]、Helton 等^[128]和 Jiang 等^[116]通过证据理论处理认知不确定性问题。Hofer 等^[112]基于蒙特卡洛仿真, 提出一种近似认知不确定性分析方法来计算混合不确定性下的系统动态可靠性, 该方法可在一定程度上减小计算工作量。Youn 等^[129]基于可能性理论, 对认知不确定性下的稳健设计优化方法进行研究。Jakeman 等^[130]提出一种认知不确定性量化框架。Lombardi 和 Haftka^[131]将优化和区间变量最坏情况相结合, 提出“逆优化”技术。Gu 等^[132]、Du 和 Chen^[133]也分别使用区间变量最坏情况对多学科系统进行了设计。Rao 和 Cao^[134]对包含区间参数的机械系统进行了优化设计。区间蒙特卡洛仿真 (Interval Monte Carlo Simulation, IMCS) 可用以处理同时考虑随机和认知不确定性下的可靠性评估, 但对于失效概率低的高维系统, 采用区间蒙特卡洛仿真较难计算其可靠度。Möller 等^[135]、Bagheri 等^[136-137]通过基于遗传算法的 α -水平截集优化方法进行模糊结构动态可靠性分析, 但均较为复杂, 且计算量较大。Yang 等^[138]和 Xiao 等^[139]采用随机变量和 p -box 变量对系统中的随机和认知不确定性进行描述, 但前者将 Kriging 代理模型和基于优化的区间蒙特卡洛仿真 (Optimization-Based Interval Monte Carlo Simulation, OIMCS) 相结合, 提出一种混合可靠性分析方法; 后者基于蒙特卡洛仿真 (Monte Carlo Simulation, MCS) 和鞍点近似法 (Saddlepoint Approximation, SPA), 对系统中的不确定分布参数进行建模, 但二者均不能用于包含模糊变量的情形。Gudder^[140]和 Kräschmer^[141]采用模糊概率研究系统中的随机和认知不确定性问题, 但较为复杂, 计算量亦较大。

随着机械设备的大型化和复杂化, 在对机械系统进行可靠性优化设计时, 设计变量和设计参数通常为各种不确定性变量的混合。对于随机变量和区间变量混合情况, Penmetsa 和 Grandhi^[127]、Starks 等^[142]、Kreinovich 等^[143]、Du 等^[144]分别给出了相应的处理方法, 但未将其应用于优化设计。Du^[145]提出基于最坏情况的可靠性优化设计方法, 该方法能较好地处理随机变量和区间变量混合下的可靠性优化设计, 但不能用于存在模糊变量的情形。

1.5.2 可靠性优化设计求解算法

可靠性优化设计包含了两个方面内容: 可靠性设计和优化设计。传统的可靠性优化设计方法将可靠性优化设计视为图 5-1 所示的两级或双环循环优化问题^[122]。采用双环循环优化时, 可靠性分析环嵌套于优化环中, 每一次优化迭代都涉及大量

的可靠性分析,因此,直接采用双环法求解可靠性优化设计问题面临计算量大、效率低下等问题。针对传统可靠性优化设计方法计算量大、效率低下等缺陷,学者做了大量研究工作,也取得了丰富的成果。可靠性优化设计中的可靠性评估包含两种不同的方法,即可靠度指数法(Reliability Index Method, RIA)和性能测量法(Performance Measure Method, PMA)。文献[146]已证明:RIA 稳定性较差,而 PMA 相对比较稳定和高效。采用 PMA 进行可靠性评估时,改进均值法(Advanced Mean Value, AMV)对凸性能函数非常有效,但对凹性能函数效率较低。为解决改进均值法的不足,共轭均值法(Conjugate Mean Value, CMV)被用来完成凹性能函数的可靠性评估。Youn 等^[147]结合 AMV 和 CMV 构成 HMV(Hybrid Mean Value, HMV),对 PMA 进行改进,提出混合分析法进行可靠性优化设计。随后, Yoon 和 Choi^[148]又将 HMV 和响应面法结合,提出一种新的可靠性优化设计方法。Kharmanda 等^[149]在混合设计空间(Hybrid Design Space, HDS)同时求解可靠性分析和优化设计问题,结合有限元提出一种全新且高效的可靠性优化设计方法。Noh 和 Choi^[150]采用高斯 Copula(Gaussian Copula)求得输入变量的联合概率密度函数,从而针对输入变量相关的系统提出一种新的可靠性优化设计方法。Thanedar^[151]、Chen 等^[152]、Kuschel 等^[153]分别采用均值一阶可靠度法(Mean Value First Order Reliability Method, MVFORM)、单环单向量法(Single Loop Single Vector, SLSV)、单级可靠性优化设计法(Single Level Reliability Based Design Optimization, SLRBDO)将两级优化整合成一个只包含单环的确定性优化。Du 和 Chen^[154]用一系列确定性优化和可靠性分析代替原有的双环模型,提出系列优化和可靠性评估方法(Sequential Optimization and Reliability Assessment, SORA)。该方法使优化设计与可靠性分析完全解耦,只在每一次确定性优化设计完成后进行可靠性分析,因此大大降低了计算量。Zou 和 Mahadevan^[155]用可靠性分析结果对可靠性约束进行近似,将确定性优化设计和可靠性分析直接解耦,提出一种更加高效的可靠性优化设计离散解耦法。该方法对包含高度非线性可靠性约束的优化模型,采用精度更高的方法(如蒙特卡洛仿真)等进行可靠度评,相比于一阶可靠度近似,有着更高的精度。Dubourg 等^[156]在增广可靠性空间建立 Kriging 代理模型,并结合子集模拟方法,提出一种新的可靠性优化设计方法。Qu 和 Haftka^[157]将设计响应面近似,结合安全系数和失效概率,提出基于概率充分因子的可靠性优化设计方法。Papadrakakis 和 Lagaros^[158]利用蒙特卡洛仿真和重要度采样进行可靠性分析,提出基于神经网络和蒙特卡洛仿真的可靠性优化设计方法。

如上所述,对可靠性优化设计问题已有很多的求解方法,但对混合不确定性下的可靠性优化设计研究甚少。工程实际设计中,各种类型的不确定性变量大量共存,

为了建立更加精确的可靠性优化设计模型，并使优化设计的求解变得更加高效，亟需对混合不确定性下的可靠性优化设计方法进行更深入的研究。

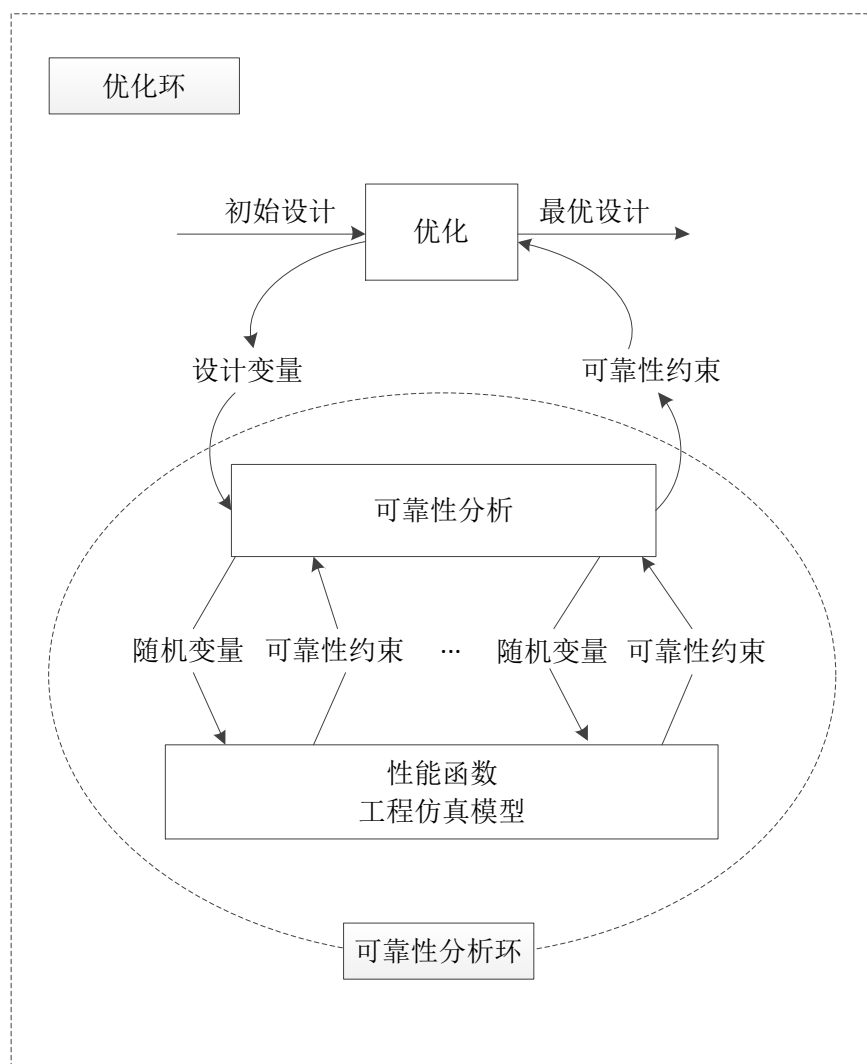


图 1-3 双环循环优化

1.6 论文主要研究工作

考虑到开展随机和认知不确定性下可靠性研究的重要性以及现今可靠性分析和机械可靠性优化设计中的难点与不足，本文拟对机械结构或系统在随机与模糊不确定性下的可靠性分析方法和可靠性优化设计方法进行研究。论文的主要研究内容包括：

（1）考虑复杂载荷及强度退化的系统可靠性建模与分析方法

在机械工程中，采用传统应力-强度干涉模型来计算可靠度时，通常没有考虑冲击载荷的作用以及强度退化的影响，这与机械结构或系统的实际使用情况不符，

因此难以保证机械结构或系统的安全可靠。针对此问题,本文将冲击载荷假设为一泊松过程且考虑强度退化的影响,建立复杂载荷作用下的动态可靠性模型并提出基于高斯-勒让德积分公式的可靠度计算方法。为了验证模型的适用性和准确性,本文对某矿用挖掘机提升机构齿轮减速器在不同工况下的接触疲劳可靠度进行计算,并将计算结果与蒙特卡洛仿真方法进行对比。

(2) 模糊变量和 p -box 变量混合下的系统可靠性分析方法

在工程实际中,模糊变量和 p -box 变量同时存在的情况比比皆是。如何准确评估该情形下的系统可靠性,需要解决的一个关键问题就是怎样处理模糊变量。本文基于熵值不变,通过等效转换将模糊变量转变为正态随机变量,并结合蒙特卡洛仿真和鞍点近似法,提出一种模糊变量和 p -box 变量混合下的系统可靠性分析新方法。为了验证所提方法的精度以及计算效率,本文拟对某一发动机涡轮盘在不同失效阈值下的可靠性进行分析。

(3) 考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法

在对多态系统进行可靠性分析时,往往面临数据收集不准确、不充足的问题,再加上连续状态系统的复杂性,需采用近似方法以减小计算量,而近似方法有时存在选取不当的问题。另外,构成多态系统的元件或子系统之间常常存在着一定的关联性,因此,传统的可靠性分析方法难以应用于多态系统。本文基于模糊通用生成函数,提出一种考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法。

(4) 模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计

实际工程中,几乎没有只包含单一类型随机变量的结构或系统,相反,往往是多种类型变量的混合共存。在传统的可靠性设计中,通常采用随机变量表征不确定性,而且随机变量可以通过确定的概率分布进行描述。然而,在实际工程中,往往难以准确得到随机变量的概率分布,甚至不能用适当的概率分布进行描述,这些不确定性变量的取值通常是模糊的或被限定在特定的区间里。本文基于熵值不变,将模糊变量等价地转化为正态随机变量,提出模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计方法。

本文共分六章,其结构框架如图 1-3 所示。

第一章对论文研究的背景、意义及可靠性发展历程和发展现状进行相关介绍,并简要概述本文的主要研究内容。

第二章考虑冲击载荷作用以及强度退化影响,研究复杂载荷及强度退化下的系统可靠性建模与分析方法。

第三章基于熵值不变,通过等价转换,研究模糊变量和 p -box 变量混合下的系统可靠性分析方法。

第四章考虑零部件或子系统之间的主从关系，基于模糊通用生成函数，提出考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法。

第五章在第三章基础上，研究模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计方法。

第六章对全文进行总结，并对未来的研究工作进行展望。

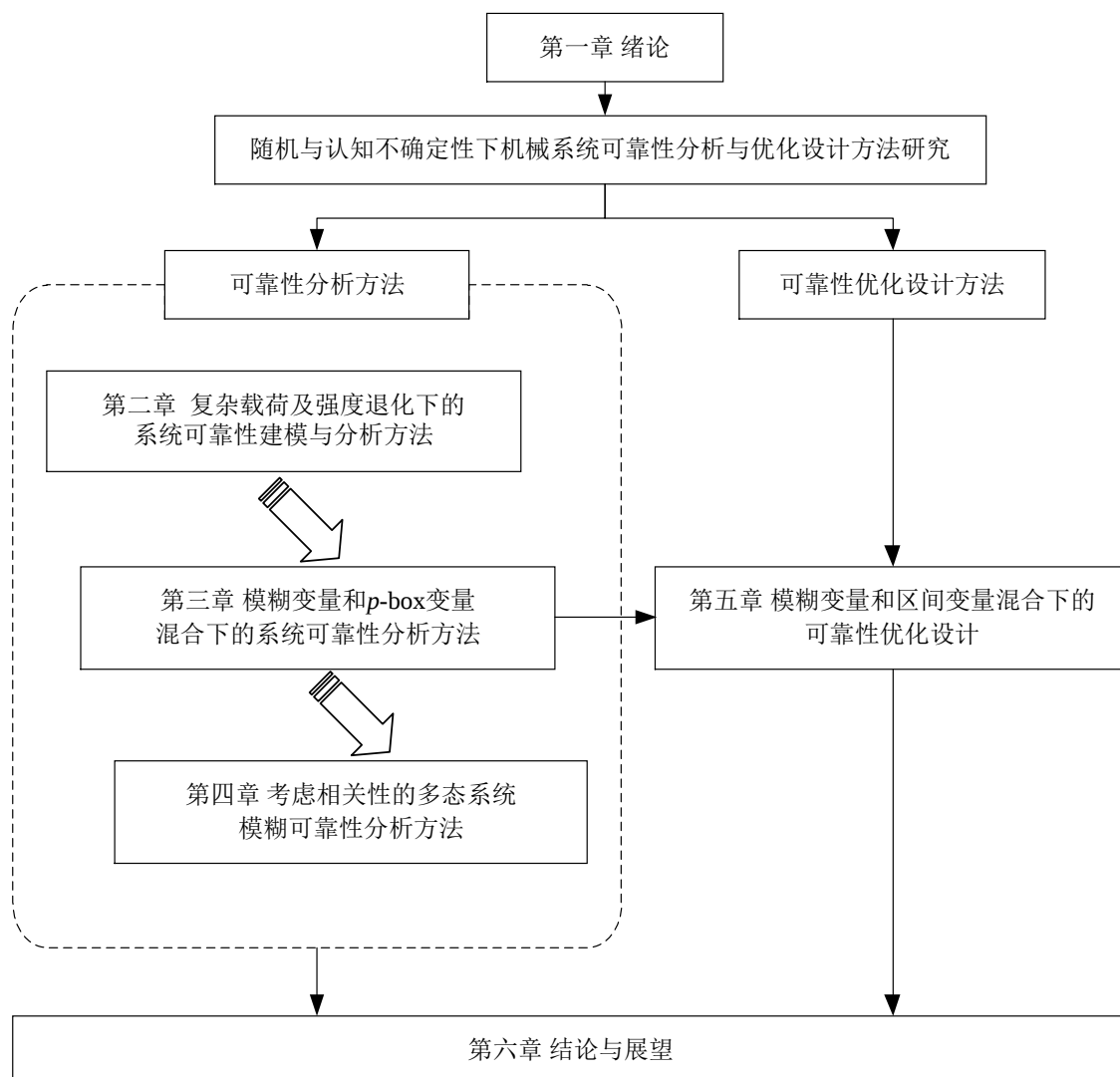


图 1-4 论文结构框架

第二章 复杂载荷及强度退化下的系统可靠性建模与分析方法

本章首先介绍应力-强度干涉理论，其次建立考虑复杂载荷作用和强度退化的动态可靠性模型，然后基于高斯-勒让德积分公式对系统进行动态可靠性评估，最后通过某矿用挖掘机提升减速器在不同工况下的接触疲劳可靠性分析对所提模型和方法进行验证。

2.1 应力-强度干涉理论

在机械产品中，零部件或系统能否正常工作取决于强度和应力之间的干涉情况。在此，应力为广义应力，例如位移、温度、力、压强、振动等能诱发失效的物理量，强度则指能抵制失效发生与应力相对的物理量。当应力小于强度时，零部件或系统工作正常；反之则发生失效。传统的应力-强度干涉模型将强度和应力均视为随机变量，如图 2-1，当强度和应力的概率密度函数曲线发生相互交叠时，强度在交叠区内可能小于应力，从而导致失效的发生。

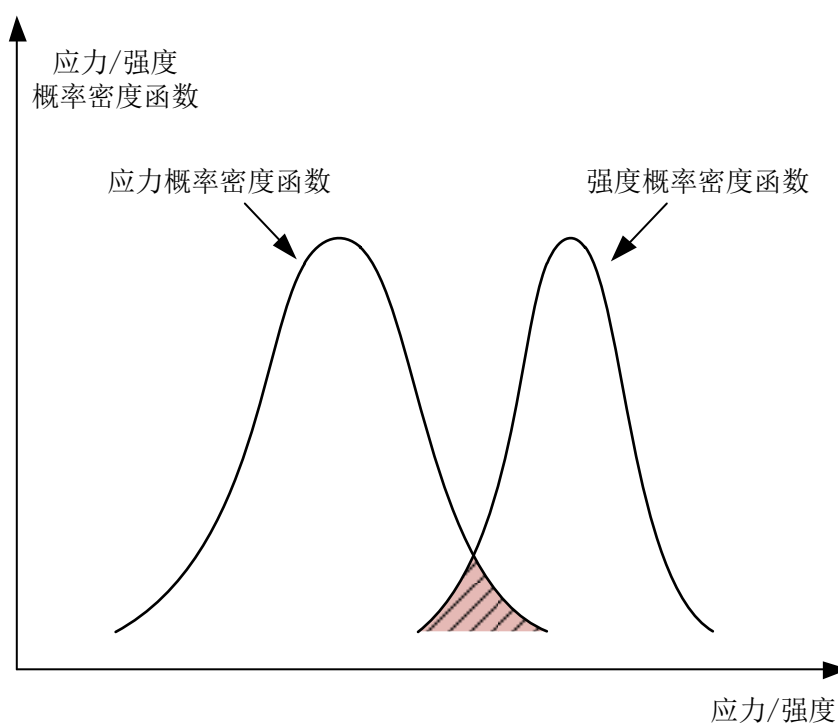


图 2-1 应力-强度干涉模型

应力-强度干涉（Stress-Strength Interference, SSI）理论是基于失效物理的可靠

性建模的基础,目前已涌现出较多研究成果对其进行改进。对于动态可靠性的建模与分析方法,已有大量学者开展了相关研究,也取得了丰硕的成果,但均缺乏对冲击载荷的考虑。然而,工程实际中的机械产品在服役过程中常受到冲击载荷作用,如汽车车架,在行驶过程中由于路面不平顺、装载不均匀,以及转弯、制动、碰撞等工况均可能对车架形成冲击载荷。另外,机械产品在使用过程中,其强度亦会随着产品的疲劳、磨损、老化等原因而逐渐下降。因此,本章首先对考虑复杂载荷和强度退化下的动态可靠性模型进行推导,然后对系统动态可靠性分析方法进行研究,针对积分复杂的问题,提出基于高斯-勒让德积分公式的可靠度计算方法,最后通过某矿用挖掘机提升减速器在不同工况下的接触疲劳可靠性分析对所提模型和方法进行验证。

2.2 复杂载荷下考虑强度退化的动态可靠性模型

为便于讨论,做以下假设:

(1) 工作载荷为随机过程,用 $L_o(\mathbf{C}, t)$ 表示;强度退化过程用随机过程 $S(\Phi, t)$ 表示;一定时间段内到达的冲击数服从强度为 $\lambda(t)$ 的泊松过程。

(2) 工作载荷、强度以及冲击载荷之间相互独立。

(3) 将 $\mathbf{C}$ 和 Φ 分别表示为 $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_m)$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ 。随机变量向量 $\mathbf{C}/\Phi$ 里的随机变量 $C_i (i=1, 2, \dots, m) / \varphi_j (j=1, 2, \dots, n)$ 相互独立,且概率密度函数已知,为 $f_{C_i}(c_i) / f_{\varphi_j}(\varphi_j)$, 则 $f_{\mathbf{C}}(\mathbf{c}) = \prod_{i=1}^m f_{C_i}(c_i)$, $f_{\Phi}(\Phi) = \prod_{j=1}^n f_{\varphi_j}(\varphi_j)$, 其中, m 和 n 分别为 $\mathbf{C}$ 和 Φ 的维数。

(4) 冲击载荷的幅值服从均值和标准差分别为 μ_{L_s} 和 σ_{L_s} 的正态分布。

考虑到实际工程中的机械系统,除了承受连续的工作载荷作用外,往往还承受离散冲击载荷作用。如果离散冲击载荷在 t 时刻出现,则系统在 t 时刻承受的总载荷为二者之和,即 $L_{o+s}(\mathbf{C}, t) = L_o(\mathbf{C}, t) + L_s$, 其中, L_s 为冲击载荷。否则,机械系统只受连续工作载荷作用,此时, $L_{o+s}(\mathbf{C}, t) = L_o(\mathbf{C}, t)$ 。由于磨损或者老化,系统的强度通常可视为随时间变化的退化过程,而退化过程又分为两种,即确定性退化过程和随机性退化过程。下面将分别对这两种情况下的系统动态可靠性模型进行推导。

2.2.1 确定性退化下的动态可靠性建模

假设系统的连续工作载荷为随机过程,且受到的泊松冲击载荷的幅值为随机变量。当强度退化过程为确定性退化过程时,任意时刻的强度 $S(\Phi, t)$ 为一确定值,此时,复杂载荷与强度之间的相互作用可以用图 2-2 予以说明。

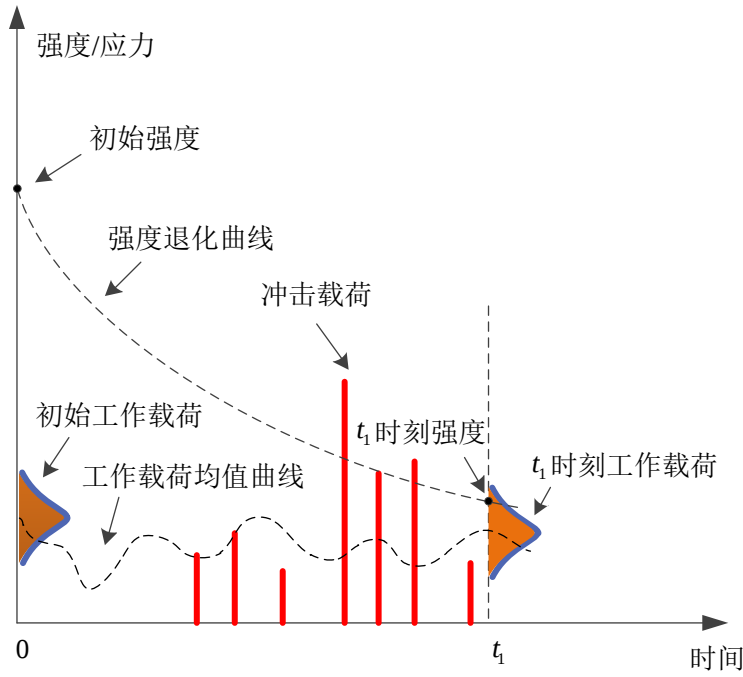


图 2-2 复杂载荷及确定性强度退化下的应力-强度干涉

根据应力-强度干涉理论， t 时刻的系统动态可靠度可表示为：

$$R(t) = \Pr\{L_{o+s}(\mathbf{C}, \tau) < S(\Phi, \tau), \forall \tau \in (0, t)\} \quad (2-1)$$

式中， $L_{o+s}(\mathbf{C}, t)$ 为复杂载荷，其值等于工作载荷与冲击载荷幅值之和。

设 $K(t)$ 表示冲击载荷在 t 时刻出现，则 $\bar{K}(t)$ 表示冲击载荷在 t 时刻不出现。根据假设(1)，冲击载荷在一定时间段内出现这一事件服从强度为 $\lambda(t)$ 的泊松过程。

对于 $\forall \tau \in (t, t + \Delta t)$ ，有：

$$\Pr\{K(\tau)\} = \lambda(\tau)\Delta t + o(\Delta t) \quad (2-2)$$

和

$$\Pr\{\bar{K}(\tau)\} = 1 - \Pr\{K(\tau)\} = 1 - \lambda(\tau)\Delta t - o(\Delta t) \quad (2-3)$$

根据全概率公式，有：

$$\begin{aligned} R(t + \Delta t) &= R(t) \times [\Pr\{L_{o+s}(\mathbf{C}, \tau) < S(\Phi, \tau)\} \times \Pr\{K(\tau)\}] \\ &\quad + R(t) \times \Pr\{\bar{K}(\tau)\}, \forall \tau \in (t, t + \Delta t) \\ &= R(t) \times \Pr\{L_{o+s}(\mathbf{C}, \tau) < S(\Phi, \tau)\} \\ &\quad \times [\lambda(\tau)\Delta t + o(\Delta t)] + R(t) \times [1 - \lambda(\tau)\Delta t - o(\Delta t)], \forall \tau \in (t, t + \Delta t) \end{aligned} \quad (2-4)$$

式(2-4)可以改写为：

$$\begin{aligned} \frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t} = & R(t) \times \Pr\{L_{o+s}(\mathbf{C}, \tau) < S(\Phi, \tau)\} \times \left[\lambda(\tau) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right] \\ & - R(t) \times \left[\lambda(\tau) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right], \forall \tau \in (t, t+\Delta t) \end{aligned} \quad (2-5)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\tau \rightarrow t$, $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$, 则有:

$$\frac{dR(t)}{dt} = R(t) \times \lambda(t) \times [\Pr\{L_{o+s}(\mathbf{C}, t) < S(\Phi, t)\} - 1] \quad (2-6)$$

注意到 $R(0)=1$, 求解以上微分方程可得:

$$\begin{aligned} R(t) = & \exp\left\{\int_0^t \lambda(\xi) \times [\Pr\{L_{o+s}(\mathbf{C}, \xi) < S(\Phi, \xi)\} - 1] d\xi\right\} \\ = & \exp\left\{\int_0^t \lambda(\xi) \times \left[\int_{-\infty}^{S(\Phi, \xi)} f_{L_{o+s}}(\mathbf{C}, \xi) d\mathbf{C} - 1\right] d\xi\right\} \end{aligned} \quad (2-7)$$

式中, $f_{L_{o+s}}(\cdot)$ 为复杂载荷的概率密度函数。

2.2.2 随机性退化下的动态可靠性建模

若系统的强度退化为一随机过程, 即任意给定时刻点的系统强度为一随机变量。随机强度退化、随机工作载荷以及泊松冲击载荷之间的相互作用可以用图 2-3 来描述。

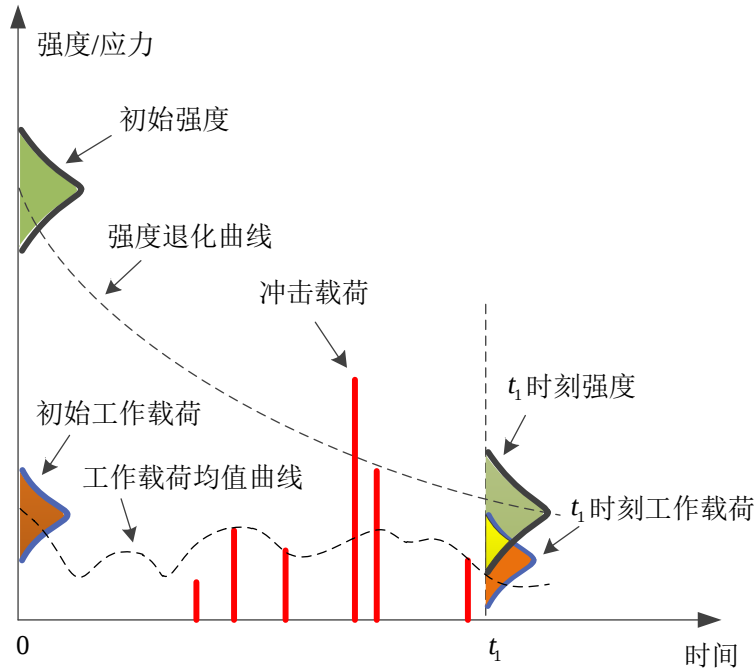


图 2-3 复杂载荷及随机强度退化下的应力-强度干涉

结合式(2-7)和全概率公式, 得到 t 时刻的系统可靠度为:

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_{\Phi} R[t | S(\Phi, t) = S(\phi, t)] f_{\Phi}(\phi) d\phi \\ &= \int_{\Phi} \exp \left\{ \int_0^t \lambda(\xi) \times \left[\int_{-\infty}^{S(\phi, \xi)} f_{L_{0+s}}(\mathbf{C}, \xi) d\mathbf{C} - 1 \right] d\xi \right\} f_{\Phi}(\phi) d\phi \end{aligned} \quad (2-8)$$

由式(2-8)可知, 随机强度退化、连续随机工作载荷和泊松随机冲击载荷作用下的系统可靠度不再属于指数分布族, 因而难以得到明确的表达式。如何求解系统的动态可靠度, 则成为可靠性分析过程中的难题。针对此问题, 本章将在下一小节中探讨复杂载荷作用下考虑强度退化的系统动态可靠度计算方法。

2.3 基于高斯-勒让德积分公式的动态可靠度计算方法

对于难以积分的问题, 可采用数值积分方法予以解决。张艳红等^[159]、赵龙等^[160]、Ding 等^[161]分别对数值积分方法在工程实际中的应用进行了研究, 在众多数值积分方法当中, 高斯-勒让德数值积分的精度最高, 达到 $2n+1$ 阶精度, 且积分精度较稳定^[162]。因此, 本章提出基于高斯-勒让德积分公式的可靠度计算方法求解 2.2 小节所提的动态可靠性模型, 以实现复杂载荷及强度退化下的系统可靠性分析。

为简便, 记

$$H(t, \phi) = \lambda(t) \times \left[\int_{-\infty}^{S(\phi, t)} f_{L_{0+s}}(\mathbf{C}, t) d\mathbf{C} - 1 \right] \quad (2-9)$$

和

$$M(t, \phi) = \exp \left[\int_0^t H(\xi, \phi) d\xi \right] \quad (2-10)$$

则有:

$$R(t) = \int_{\Phi} M(t, \phi) f_{\Phi}(\phi) d\phi \quad (2-11)$$

和

$$\begin{aligned} M(t + \Delta t, \phi) &= \exp \left[\int_0^{t+\Delta t} H(\xi, \phi) d\xi \right] \\ &= \exp \left[\int_0^t H(\xi, \phi) d\xi + \int_t^{t+\Delta t} H(\xi, \phi) d\xi \right] \end{aligned} \quad (2-12)$$

如果时间增量 Δt 足够小, 根据梯形积分公式, 有:

$$\exp \left[\int_t^{t+\Delta t} H(\xi, \phi) d\xi \right] \approx \exp \left[\frac{H(t, \phi) + H(t + \Delta t, \phi)}{2} \Delta t \right] \quad (2-13)$$

对式(2-13)进行一阶泰勒展开，可得：

$$\exp\left[\frac{H(t, \varphi) + H(t + \Delta t, \varphi)}{2} \Delta t\right] = 1 + \frac{H(t, \varphi) + H(t + \Delta t, \varphi)}{2} \Delta t + o(\Delta t) \quad (2-14)$$

将式(2-13)和(2-14)带入式(2-12)，可以得到：

$$\begin{aligned} M(t + \Delta t, \varphi) &\approx \exp\left[\int_0^t H(\xi, \varphi) d\xi + \frac{H(t, \varphi) + H(t + \Delta t, \varphi)}{2} \Delta t\right] \\ &= M(t, \varphi) \times \exp\left[\frac{H(t, \varphi) + H(t + \Delta t, \varphi)}{2} \Delta t\right] \\ &\approx M(t, \varphi) \left(1 + \frac{H(t, \varphi) + H(t + \Delta t, \varphi)}{2} \Delta t\right) \end{aligned} \quad (2-15)$$

联立式(2-11)和(2-15)，则有：

$$\begin{aligned} R(t + \Delta t) &= \int_{\varphi} M(t + \Delta t, \varphi) f_{\Phi}(\varphi) d\varphi \\ &\approx \int_{\varphi} M(t, \varphi) \left(1 + \frac{H(t, \varphi) + H(t + \Delta t, \varphi)}{2} \Delta t\right) f_{\Phi}(\varphi) d\varphi \\ &= R(t) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\varphi} M(t, \varphi) [H(t, \varphi) + H(t + \Delta t, \varphi)] f_{\Phi}(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (2-16)$$

对单变量而言，即 $\varphi = \varphi$ ，对式(2-16)中的第二项积分式采用高斯-勒让德积分公式，可得：

$$\begin{aligned} &\int_{\varphi} M(t, \varphi) [H(t, \varphi) + H(t + \Delta t, \varphi)] f_{\Phi}(\varphi) d\varphi \\ &= \int_{\varphi_l}^{\varphi_u} M(t, \varphi) [H(t, \varphi) + H(t + \Delta t, \varphi)] f_{\Phi}(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{\varphi_u - \varphi_l}{2} \sum_{k=1}^m A_k M(t, \varphi_k) [H(t, \varphi_k) + H(t + \Delta t, \varphi_k)] f_{\Phi}(\varphi_k) \end{aligned} \quad (2-17)$$

式中， $\varphi_k = \frac{\varphi_u - \varphi_l}{2} x_k + \frac{\varphi_u + \varphi_l}{2}$ ， m 为节点数， x_k 为高斯-勒让德积分节点， A_k 为相应的积分系数。高斯-勒让德积分节点和积分系数如表 2-1 所示。

表 2-1 高斯-勒让德积分节点和积分系数（ $m = 11$ ）^[163]

x_k	± 0.978229	± 0.887063	± 0.730152	± 0.519096	± 0.269543	0
A_k	0.055669	0.125580	0.186290	0.233194	0.262805	0.272925

当 $\boldsymbol{\varphi}$ 为二维随机变量, 即 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ 时, 可得二次高斯-勒让德积分公式:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\boldsymbol{\varphi}} M(t, \boldsymbol{\varphi}) [H(t, \boldsymbol{\varphi}) + H(t + \Delta t, \boldsymbol{\varphi})] f_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{\varphi} \\
 &= \frac{\varphi_{2U} - \varphi_{2L}}{2} \sum_{k=1}^m A_k \left\{ \frac{\varphi_{1U} - \varphi_{1L}}{2} \sum_{k=1}^m A_k \left\{ M(t, \boldsymbol{\varphi}) [H(t, \boldsymbol{\varphi}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + H(t + \Delta t, \boldsymbol{\varphi})] f_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\varphi}) \right\}_{\varphi_1 = \varphi_{1k}} \right\}_{\varphi_2 = \varphi_{2k}} \\
 &= \prod_{i=1}^2 \frac{\varphi_{iU} - \varphi_{iL}}{2} \sum_{k=1}^m A_k \left\{ \sum_{k=1}^m A_k \left\{ M(t, \boldsymbol{\varphi}) [H(t, \boldsymbol{\varphi}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + H(t + \Delta t, \boldsymbol{\varphi})] f_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\varphi}) \right\}_{\varphi_1 = \varphi_{1k}} \right\}_{\varphi_2 = \varphi_{2k}} \quad (2-18)
 \end{aligned}$$

式中, $\varphi_{ik} = \frac{\varphi_{iU} - \varphi_{iL}}{2} x_k + \frac{\varphi_{iU} + \varphi_{iL}}{2}$, $i=1, 2$, m 为节点数, x_k 为高斯-勒让德积分节点, A_k 为相应的积分系数。

将式(2-18)推广到 n 维情况, 即 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ 时, 可得:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\boldsymbol{\varphi}} M(t, \boldsymbol{\varphi}) [H(t, \boldsymbol{\varphi}) + H(t + \Delta t, \boldsymbol{\varphi})] f_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{\varphi} \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{\varphi_{iU} - \varphi_{iL}}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^m A_k \dots \left\{ \sum_{k=1}^m A_k \cdot \left\{ M(t, \boldsymbol{\varphi}) [H(t, \boldsymbol{\varphi}) \right. \right.}_{k=1} \right\}_{\varphi_1 = \varphi_{1k}}}_{n} \\
 & \quad \left. \left. + H(t + \Delta t, \boldsymbol{\varphi})] f_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\varphi}) \right\}_{\varphi_1 = \varphi_{1k}} \right\}_{\dots, \varphi_n = \varphi_{nk}} \quad (2-19)
 \end{aligned}$$

联立式(2-16)和(2-19), 可以得到任意时刻 $t_j = j \cdot \Delta t$ ($j=1, 2, \dots$) 系统可靠度的数值递推公式:

$$\begin{aligned}
 R(t_j) \approx R(t_{j-1}) + \frac{\prod_{i=1}^n (\varphi_{iU} - \varphi_{iL}) \Delta t}{2^{n+1}} \underbrace{\sum_{k=1}^m A_k \dots \left\{ \sum_{k=1}^m A_k \cdot \right.}_{n} \\
 \left. \left\{ M(t_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}) [H(t_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}) + H(t_j, \boldsymbol{\varphi})] f_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\varphi}) \right\}_{\varphi_1 = \varphi_{1k}} \right\}_{\dots, \varphi_n = \varphi_{nk}}} \quad (2-20)
 \end{aligned}$$

式中, $M(t_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}) = M(t_{j-2}, \boldsymbol{\varphi}) \left(1 + \frac{[H(t_{j-2}, \boldsymbol{\varphi}) + H(t_{j-1}, \boldsymbol{\varphi})] \Delta t}{2} \right)$, $t_0 = 0$, $R(0) = 1$,

$M(t_0, \boldsymbol{\varphi}) = 1$ 。

式(2-20)为本章提出的基于高斯-勒让德积分公式的动态可靠度计算方法。由式(2-20)可知,利用高斯-勒让德积分公式,将动态可靠性分析中的多重积分转化为一系列多项式的和,这样,即可通过近似积分方法得到系统的动态可靠度,以解决多重积分造成无法明确表达和直接计算系统可靠度的问题。

2.4 算例分析

为验证本章所提方法的适用性和准确性,本小节以图 2-4 所示的某矿用挖掘机提升机构齿轮减速器为例,计算输出齿轮的接触疲劳可靠性。在露天矿场的开采过程中,挖掘机的铲斗除受工作载荷作用外,还受冲击载荷的作用,进而传递至提升机构齿轮减速器,使其在服役过程中受到的载荷为复杂载荷^[164]。此外,长时间的使用导致齿轮齿面的接触强度因发生疲劳、磨损而逐渐降低,因此,为更准确地评估输出齿轮的接触疲劳可靠性需充分考虑服役过程中复杂载荷和强度退化的影响。根据载荷工况的不同,可分三种情况分别进行讨论:第一种情况是确定性强度退化与齐次泊松过程冲击载荷工况;第二种情况是随机性强度退化与齐次泊松过程冲击载荷工况;第三种情况是随机性强度退化与非齐次泊松过程冲击载荷工况。

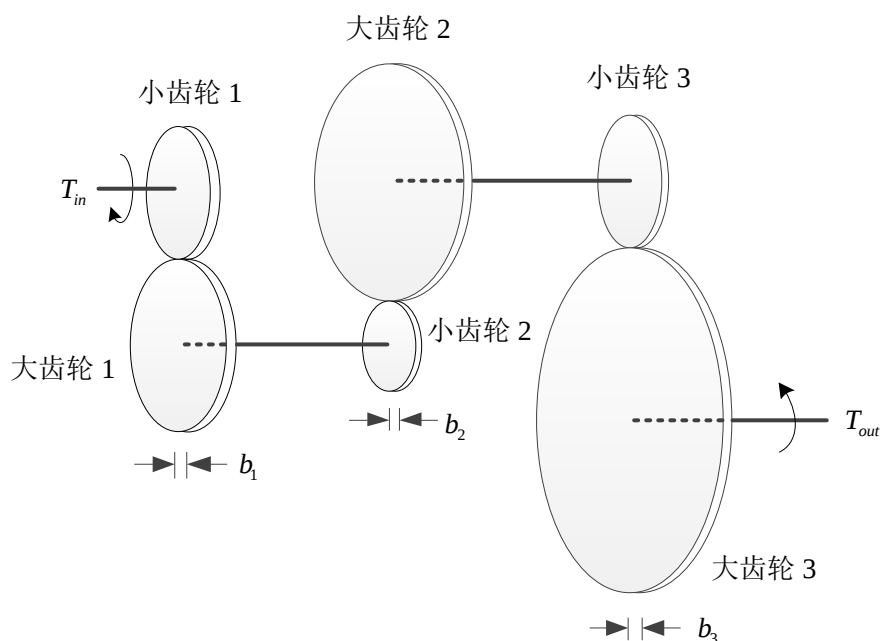


图 2-4 提升机构齿轮减速器

已知提升机构齿轮减速器的部分参数如表 2-2 所示,对于大齿轮 3,根据文献[165],齿轮表面的赫兹接触应力为:

$$\sigma_H = C_p \sqrt{\frac{F_{t3}}{b_3 d_{g3} I} K_v K_o K_m} \quad (2-21)$$

式中， σ_H 为赫兹接触应力， C_p 为材料的弹性系数， F_{t3} 为大齿轮 3 受到的切向力， b_3 和 d_{g3} 分别为大齿轮 3 的齿宽和分度圆直径， K_v 、 K_o 和 K_m 分别为速度因子、过载系数及安装系数， I 为几何因素，可以表示为：

$$I = \frac{d_{g3}}{2(d_{g3} + d_{p3})} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2-22)$$

式中， α 为分度圆压力角， d_{g3} 和 d_{p3} 分别为大齿轮 3 和小齿轮 3 的分度圆直径。

表 2-2 提升机构齿轮减速器部分参数

名称	符号	均值	标准差	分布类型	单位
驱动力矩	T_{in}	2160	21.6	正态	kN m
分度圆压力角	α	20	0	/	degress
速度系数	K_v	2.0	0	/	none
过载系数	K_o	1.0	0	/	none
装配系数	K_m	1.6	0	/	none
大齿轮 3 齿宽	b_3	300	3.0	正态	mm
弹性系数	C_p	6.0	0.06	正态	(MPa) ^{1/2}
大齿轮 1 直径	d_{g1}	500	5.0	正态	mm
大齿轮 2 直径	d_{g2}	660	6.6	正态	mm
大齿轮 3 直径	d_{g3}	850	8.5	正态	mm
小齿轮 1 直径	d_{p1}	300	3.0	正态	mm
小齿轮 2 直径	d_{p2}	220	2.2	正态	mm
小齿轮 3 直径	d_{p3}	300	3.0	正态	mm

由于每一对齿轮组都可使转矩增大，因此，大齿轮 3 所受到的切向力可以表示为：

$$F_{t3} = \frac{2T_{in}}{d_{p3}} \times \frac{d_{g1} d_{g2}}{d_{p1} d_{p2}} \quad (2-23)$$

式中, F_{t3} 为大齿轮 3 所受切向力, T_{in} 为初始的驱动转矩, d_{g1} 和 d_{p1} 分别为大齿轮 1 和小齿轮 1 的分度圆直径, d_{g2} 和 d_{p2} 分别为大齿轮 2 和小齿轮 2 的分度圆直径。

联立式(2-21)-(2-23)可得:

$$\sigma_H = C_p \sqrt{\frac{4T_{in} d_{g1} d_{g2} (d_{g3} + d_{p3})}{b_3 d_{p1} d_{p2} d_{p3} d_{g3}^2 \sin \alpha \cos \alpha} K_v K_o K_m} \quad (2-24)$$

对式(2-24)采用蒙特卡洛仿真可得到接触应力的 10000 个样本值, 然后进行正态拟合, 计算接触应力的均值和标准差分别为 526.8MPa 和 42.5MPa。下面针对三种不同工况下的动态可靠性进行分析, 并与蒙特卡洛仿真结果进行对比, 以验证所提方法的适用性和准确性。

(1) 确定性强度退化和齐次泊松过程冲击

经长时间工作, 齿轮接触面的强度会由于疲劳而逐渐降低。对于确定性强度退化, 假设强度可以表示为 $S(\Phi, t) = \varphi_0 (1 - 0.00025t)$, 初始强度 φ_0 的值为 800MPa, 则任一时刻点 t_m , 强度 $S(\Phi, t_m) = \varphi_0 (1 - 0.00025t_m) = 800 - 0.2t_m$ 为一确定的常数。假设冲击载荷的作用过程服从强度为 $\lambda(t) = 1.0 \text{ hr}^{-1}$ 的齐次泊松过程且冲击载荷的幅值 L_s 服从均值为 100MPa、标准差为 20MPa 的正态分布。为考虑工作环境的不确定性, 用 $L_o(C, t) = C(1 + 0.0001t)$ 表示连续的工作载荷, 其中, C 服从均值为 $\mu_C = 526.8\text{MPa}$ 、标准差为 $\sigma_C = 42.5\text{MPa}$ 的正态分布。根据正态分布的可叠加性可知, $L_{o+s}(C, t)$ 也服从正态分布, 且均值和方差可表示为:

$$\mu_{L_{o+s}}(t) = 626.8 + 0.05268t \text{ MPa} \quad (2-25)$$

和

$$\sigma_{L_{o+s}}(t) = \sqrt{42.5^2 \times (1 + 0.0001t)^2 + 400} \text{ MPa} \quad (2-26)$$

根据概率论的知识: 如果一个变量 x 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 那么 x 的取值超出区间 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 的概率不会超过千分之三, 超出区间 $[\mu - 6\sigma, \mu + 6\sigma]$ 的概率不会超过十亿分之二^[166]。为了简化计算并且保证较高的精度, 采用“ 6σ ”准则计算式(2-7), 可得:

$$R(t) = \exp \left\{ \int_0^t 1 \times \left[\int_{626.8+0.05268\xi-6\sqrt{42.5^2 \times (1+0.0001\xi)^2 + 400}}^{800-0.2\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{42.5^2 \times (1+0.0001\xi)^2 + 400}} \exp \left\{ -\frac{(C-626.8-0.05268\xi)^2}{2 \times [42.5^2 \times (1+0.0001\xi)^2 + 400]} \right\} dC - 1 \right] d\xi \right\} \quad (2-27)$$

对式(2-27)进行直接积分, 可得图 2-5 所示可靠度曲线。

通常, 不同的初始强度对应不同的可靠度曲线。为更好地验证本章所提方法的有效性, 分别计算初始强度为 720MPa、800MPa、850MPa 时相应的可靠度曲线, 如图 2-6 所示。

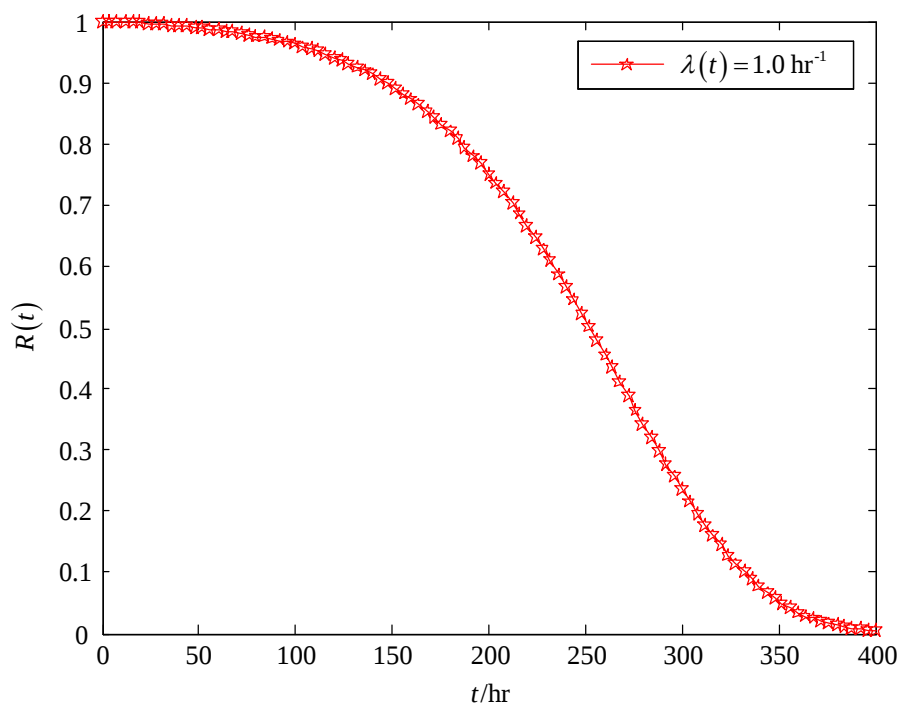


图 2-5 可靠度曲线

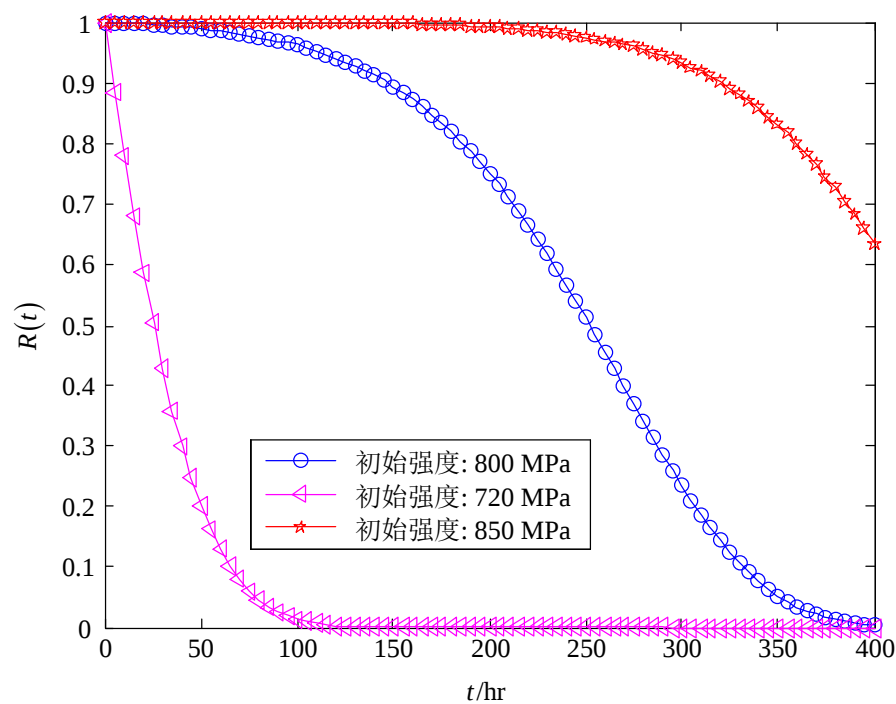


图 2-6 对应于不同初始强度的可靠度曲线

对于不同泊松强度 $\lambda(t)$ ， $R(t)$ 和 t 之间的关系曲线如图 2-7 所示。

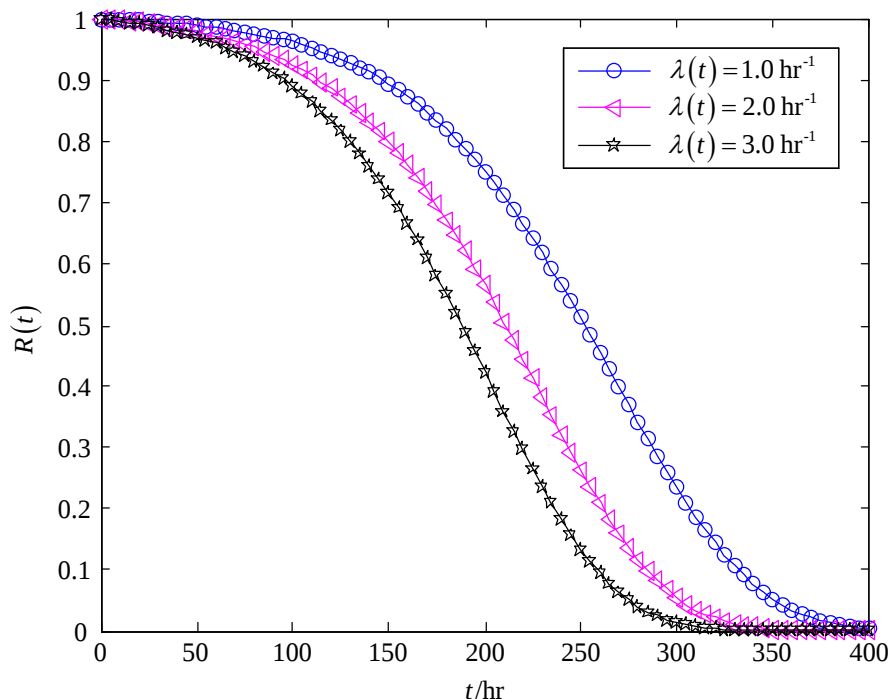


图 2-7 不同泊松强度下的可靠度曲线

由图 2-6 和 2-7 可知，可靠度曲线的形状和尺度随初始强度 φ_0 和泊松强度 $\lambda(t)$ 取值的不同而发生变化。因此，对于确定性强度退化和齐次泊松过程冲击载荷作用下的可靠度曲线， φ_0 和 $\lambda(t)$ 可视为类似于威布尔分布（Weibull distribution）中的形状参数和尺度参数。

（2）随机性强度退化和齐次泊松过程冲击

对于随机性强度退化，假设强度可表示为 $S(\Phi, t) = \varphi_0 (1 - 0.00025t)$ ，其中 φ_0 服从均值和标准差分别为 $\mu_{\varphi_0} = 800$ MPa 和 $\sigma_{\varphi_0} = 20$ MPa 的正态分布。对于任一时刻点 t_m ， $S(\Phi, t_m) = \varphi_0 (1 - 0.00025t_m)$ 为一随机变量。其余参数和情况（1）相同。

根据“ 6σ ”准则，积分变量 φ 的上下限分别为：

$$\mu_{\varphi_0} + 6\sigma_{\varphi_0} = 920 \text{ MPa} \quad (2-28)$$

和

$$\mu_{\varphi_0} - 6\sigma_{\varphi_0} = 680 \text{ MPa} \quad (2-29)$$

联立式(2-8)、(2-28)和(2-29)可得：

$$\begin{aligned}
R(t) = \int_{680}^{920} \exp \left\{ \int_0^t 1 \times \left[\int_{-\infty}^{(1-0.00025\xi)\varphi} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{42.5^2 \times (1+0.0001\xi)^2 + 400}} \right. \right. \\
\left. \left. \exp \left(-\frac{(C-626.8-0.05268\xi)^2}{2 \times [42.5^2 \times (1+0.0001\xi)^2 + 400]} \right) dC - 1 \right] d\xi \right\} \\
\frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 20} \exp \left[-\frac{(\varphi-800)^2}{2 \times 20^2} \right] d\varphi
\end{aligned} \quad (2-30)$$

采用式(2-20)的计算方法,同时设置步长 $\Delta t = 0.1 \text{ hr}^{-1}$,则可得任意时刻 $t = n \cdot \Delta t$ 的系统可靠度。为了验证本章所提方法的正确性及有效性,将采用本章所提方法得到的可靠性分析结果与蒙特卡洛仿真方法所得结果进行对比,两种方法所得到可靠度曲线如图 2-8 所示。

由图 2-8 可知,利用本章所提新方法计算得到的系统可靠度与采用蒙特卡洛方法得到的结果相近。因此,本章所提方法的预测精度可接受,可将其应用于工程实际中随机性强度退化和齐次泊松过程冲击载荷下的动态可靠性分析。

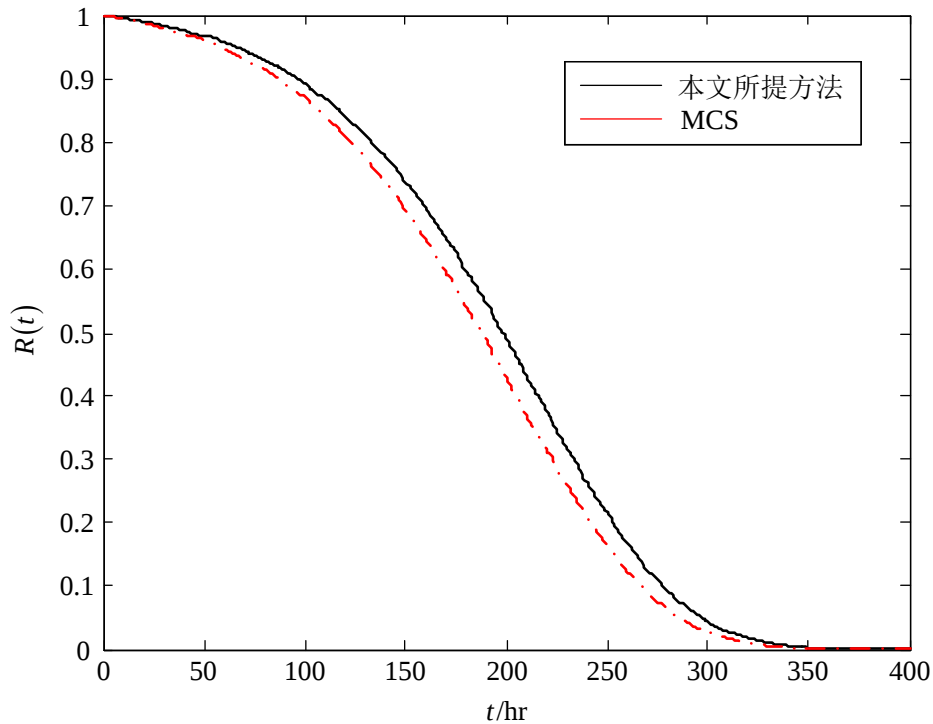


图 2-8 不同方法对应的可靠度曲线

(3) 随机性强度退化和非齐次泊松过程冲击

假设冲击载荷服从非齐次泊松过程,且强度为 $\lambda(t) = e^{-0.002t} \text{ hr}^{-1}$,其余参数和

情况 (2) 相同。

式(2-30)可改写为:

$$\begin{aligned}
 R(t) = \int_{680}^{920} \exp \left\{ \int_0^t \exp(-0.002\xi) \times \left[\int_{-\infty}^{(1-0.00025\xi)\varphi} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{42.5^2 \times (1+0.0001\xi)^2 + 400}} \right. \right. \\
 \left. \left. \exp \left(-\frac{(C-626.8-0.05268\xi)^2}{2 \times [42.5^2 \times (1+0.0001\xi)^2 + 400]} \right) dC - 1 \right] d\xi \right\} \\
 \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 20} \exp \left(-\frac{(\varphi-800)^2}{2 \times 20^2} \right) d\varphi \right\}
 \end{aligned} \quad (2-31)$$

设置步长 $\Delta t = 0.1 \text{ hr}^{-1}$ ，并用式(2-20)计算系统可靠度，则可得非齐次泊松过程的强度函数图像以及不同泊松强度下的可靠度曲线，如图 2-9 所示。

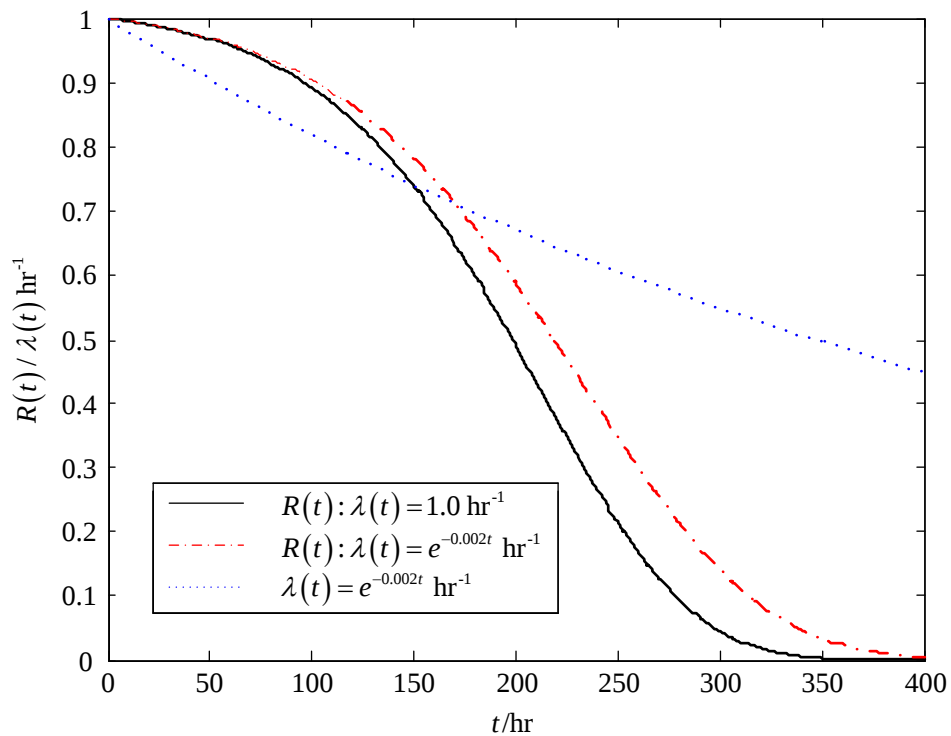


图 2-9 $\lambda(t)$ 以及不同泊松强度下的可靠度曲线

由图 2-9 可知，随着泊松强度的增大，系统可靠度会迅速下降。若给定系统所需要的可靠度，则在系统可靠度快要降到最低要求可靠度值的某一时刻必须采取预防性维修措施，以保持系统的安全可靠。

2.5 本章小结

本章基于应力-强度干涉理论，建立了一种考虑复杂载荷作用和强度退化的动态可靠性模型，提出了基于高斯-勒让德积分公式的动态可靠度计算方法。本章建立的动态可靠性模型不仅适用于冲击载荷服从齐次泊松过程的可靠性分析，而且适用于冲击载荷为非齐次泊松过程的可靠性分析。对包含复杂随机载荷作用和随机强度退化的系统而言，采用直接积分方法较难计算系统可靠度。因此，本章提出基于高斯-勒让德积分公式的动态可靠度计算方法，将该方法与“ 6σ ”准则相结合，使原先的多重积分转化为一系列多项式的和，这样可大大减少计算量同时保证较高精度。为验证本章所提模型和方法的正确性和工程适用性，将所提模型和方法应用于某矿用挖掘机提升机构齿轮减速器在三种不同工况下的接触疲劳可靠性分析，并与蒙特卡洛方法的计算结果进行对比，分析结果表明：对于确定性强度退化，初始强度和泊松冲击强度可视为可靠度曲线的形状参数和尺度参数。对于强度为随机性退化过程以及冲击载荷的到达服从齐次或非齐次泊松过程的系统，若给定所需的可靠度，则可根据可靠度曲线，在系统进入故障状态之前进行预防性维修以保证系统的安全运行。在本章中，强度和应力被假设为相互独立的随机变量，且冲击载荷的幅值为正态分布。在后续的研究中，将考虑强度和应力之间的相关性以及幅值为随机过程的情形。

第三章 模糊变量和 p -box 变量混合下的系统可靠性分析方法

在上一章中,建立了复杂载荷和强度退化下的动态可靠性模型,但在此模型中,工作载荷、冲击载荷以及强度退化都事先被假定能用特定的概率分布函数或随机过程来描述。在实际工程中,由于数据的缺乏、人们对事物认识的不足或人类知识水平的有限,常常存在多种不确定性,从而难以甚至不能准确得知某些变量的分布类型或分布参数,而仅仅知道变量的大致取值范围或将其表示为模糊变量,因此,本章将在第二章基础之上,研究混合不确定性下的系统可靠性分析方法。

3.1 引言

工程实际中广泛存在着不确定性问题,如何评估不确定性下结构或系统的可靠性是近年来工程界和学术界的研究热点。不确定性通常可分为两大类,即随机不确定性和认知不确定性。对于随机不确定性问题可用概率论加以处理,而认知不确定性问题,通常用区间数、概率盒(Probability Box, p -box)以及模糊集等进行描述。现如今,已有多种方法和理论可用于处理认知不确定性问题,如区间概率^[113]、可能性理论^[114-115]、证据理论^[116]、模糊集^[117]、凸模型^[118-120]以及贝叶斯方法^[121]等。复杂机械系统或产品在服役过程中,受多种不确定性因素影响,其可靠性分析为典型的混合不确定性问题。通常,可用 p -box 变量和模糊变量对随机和认知不确定性进行描述,因此,当系统同时存在随机和认知不确定性时,如何通过研究模糊变量和 p -box 变量对机械系统或产品的可靠性进行有效而准确的评估,意义重大。Hofer 等^[112]基于蒙特卡洛仿真,提出一种近似认知不确定性分析方法来计算混合不确定性下沸水反应堆的动态可靠性,该方法可在一定程度上减小计算的工作量。区间蒙特卡洛仿真(Interval Monte Carlo Simulation, IMCS)可用以处理同时考虑随机和认知不确定性下的可靠性评估,但对于失效概率低的高维系统,较难计算其可靠度。Yang 等^[138]和 Xiao 等^[139]采用随机变量和 p -box 变量对系统中的随机和认知不确定性进行描述,前者将 Kriging 代理模型和基于优化的区间蒙特卡洛仿真(Optimization-Based Interval Monte Carlo Simulation, OIMCS)相结合,提出一种混合可靠性分析方法;后者基于蒙特卡洛仿真(Monte Carlo Simulation, MCS)和鞍点近似法(Saddlepoint Approximation, SPA),对系统中的不确定分布参数进行建模,但二者均不适用于包含模糊变量的情况。Gudder^[140]和 Kr äschmer^[141]采用模糊概率研究系统中的随机和认知不确定性问题,但较为复杂,计算量亦较大。

综上,虽然目前对混合不确定性下的可靠性分析已开展了大量研究,也取得了

一定的成果，但模糊变量和 p -box 变量混合下的系统可靠性分析仍然是一大挑战。要准确计算该情形下的系统可靠度，所需解决的一个关键问题就是如何处理模糊变量。本章将基于熵值不变原理和鞍点近似法，提出一种模糊变量和 p -box 变量混合下的系统可靠性分析新方法。

3.2 p -box 变量及鞍点近似法

3.2.1 p -box 变量

概率盒 (Probability box, p -box) 可看作是随机不确定性和认知不确定性同时存在下，不确定数的一种表征^[167]。在该理论中，仅知道 p -box 变量的累积分布函数 (Cumulative Distribution Function, CDF) 位于一组上下界围成的区间内。因此，对于 p -box 变量 $\bar{X}$ ，其累积分布函数 $F_{\bar{X}}(\bar{x})$ 满足：

$$E_{\bar{X}}(\bar{x}) \leq F_{\bar{X}}(\bar{x}) \leq \bar{F}_{\bar{X}}(\bar{x}) \quad (3-1)$$

式中， $E_{\bar{X}}(\cdot)$ 和 $\bar{F}_{\bar{X}}(\cdot)$ 分别为累积分布函数的上界和下界。

概率盒的产生可能源于各种信息的不完备，产生概率盒的方法很多，包括区间参数分布、Kolmogorov-Smirnov 置信区间以及马尔可夫不等式等。本章中，仅考虑分布参数为区间的 p -box 变量。假设 p -box 变量 $\bar{X}$ 服从正态分布，且其均值在区间 $[4, 10]$ 内，标准差为常数 2，那么 $\bar{X}$ 的累积分布函数为一个概率盒，如图 3-1 所示。

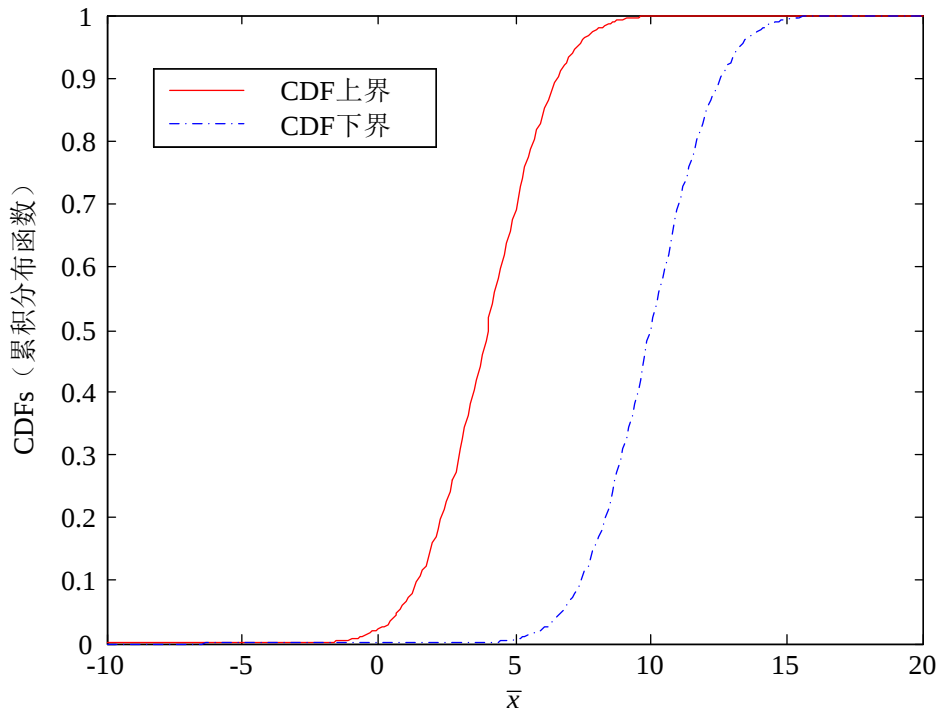


图 3-1 p -box 变量 $\bar{X}$ 的累积分布函数

3.2.2 鞍点近似法

与一阶可靠性方法（First Order Reliability Method, FORM）相比，鞍点近似法（Saddlepoint Approximation, SPA）具有较高的计算精度，因此 SPA 是结构可靠性分析中较为有效的方法^[168-169]。设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 n 维随机向量， $Z_s = g_s(\mathbf{X})$ 为结构的输出。若 Z_s 的概率密度函数（Probability Density Function, PDF） $f_{Z_s}(z_s)$ 已知，则 Z_s 的矩母函数（Moment Generating Function, MGF） $M(\xi)$ 和累积母函数（Cumulative Generating Function, CGF） $K(\xi)$ 可分别用式(3-2)和(3-3)计算。

$$M(\xi) = E[e^{\xi Z_s}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi z_s} f_{Z_s}(z_s) dz_s \quad (3-2)$$

$$K(\xi) = \log[M(\xi)] \quad (3-3)$$

通过傅里叶逆变换， $f_{Z_s}(z_s)$ 与 $K(\xi)$ 的关系可表达如下：

$$f_{Z_s}(z_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[K(\xi) - \xi z_s]} d\xi \quad (3-4)$$

只有变量 Z_s 的分布已知时，式(3-3)中的 CGF 才具有解析解^[170]。若 CGF 不存在解析形式，则可用其近似解代替。文献[171]指出，通过计算式(3-5)中的前四阶累积量，可较为准确地获得 CGF 的近似解。

$$\begin{cases} k_1 = \frac{s_1}{N} \\ k_2 = \frac{Ns_2 - s_1^2}{N(N-1)} \\ k_3 = \frac{2s_1^3 - 3Ns_1s_2 + N^2s_3}{N(N-1)(N-2)} \\ k_4 = \frac{-6s_1^4 + 12Ns_1^2s_2 - 3N(N-1)s_2^2 - 4N(N+1)s_1s_3 + N^2(N+1)s_4}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \end{cases} \quad (3-5)$$

式中， $s_r = \sum_{j=1}^N (z_s^j)^r$ ($r=1, 2, 3, 4$)， z_s^j 是通过仿真求得的结构输出， N 为仿真次数。

这样，累积母函数可用前四阶累积量表示为：

$$K(\xi) = k_1\xi + \frac{1}{2}k_2\xi^2 + \frac{1}{3!}k_3\xi^3 + \frac{1}{4!}k_4\xi^4 \quad (3-6)$$

令累积母函数 $K(\xi)$ 关于 ξ 的一阶导数等于 z_s ，即：

$$K'(\xi) = z_s \quad (3-7)$$

则鞍点 ξ_s^* 为式(3-7)的解。

Daniels^[172]将式(3-4)进行幂级数展开并对其进行积分,得到 Z_s 的概率密度函数为:

$$f_{Z_s}(z_s) = \left[\frac{1}{2\pi K''(\xi_s^*)} \right]^{1/2} e^{[K(\xi_s^*) - \xi_s^* z_s]} \quad (3-8)$$

式中, $K''(\cdot)$ 为累积母函数的二阶导数。

近年来研究较多的鞍点近似法也可用于随机变量 Z_s 的累积分布函数估算, Lugannani 和 Rice^[173]提出的认可度高且广泛运用的累积分布函数估算式如下:

$$F(z_s) = \Pr\{Z_s \leq z_s\} = \Phi(w) + \phi(w) \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{v} \right) \quad (3-9)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 分别为标准正态分布的累积分布函数和概率密度函数, w 和 v 可表示为:

$$w = \text{sgn}(\xi_s^*) \left\{ 2 \left[\xi_s^* z_s - K(\xi_s^*) \right] \right\}^{1/2} \quad (3-10)$$

$$v = \xi_s^* \left[K''(\xi_s^*) \right]^{1/2} \quad (3-11)$$

式中, $\text{sgn}(\xi_s^*) = 1$ 、0 或 -1 依次对应于 ξ_s^* 为正数、0 或负数, $K''(\cdot)$ 为 $K(\cdot)$ 的二阶导数且 $K''(\cdot) \geq 0$ 。关于 SPA 的更多介绍可参见文献[174-175]。

3.3 基于熵值不变的等效转换方法

Shannon 和 Weaver 将随机变量 X 的概率熵定义为^[176]:

$$H_X = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \ln f_X(x) dx \quad (3-12)$$

式中, H_X 为概率熵, $f_X(x)$ 为 X 的概率密度函数。

若 X 服从正态分布, 且其均值 μ 和标准差 σ 已知, 式(3-12)可转化为:

$$\begin{aligned} H_X &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \ln f_X(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} + \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) \end{aligned} \quad (3-13)$$

若连续模糊变量 $\tilde{X}$ 可表示为 $\int_U \mu_{\tilde{X}}(x) / x, (x \in U = [U^{lb}, U^{ub}])$, 其中, $\mu_{\tilde{X}}(x)$ 为隶属函数, U^{lb} 和 U^{ub} 分别为论域的上、下界。根据概率熵的定义, 可将模糊熵定义为^[177]:

$$G_{\tilde{X}} = - \int_U \mu'_{\tilde{X}}(x) \ln \mu'_{\tilde{X}}(x) dx \quad (3-14)$$

式中, $G_{\tilde{X}}$ 为模糊变量 $\tilde{X}$ 的模糊熵, $\mu'_{\tilde{X}}(x) = \mu_{\tilde{X}}(x) / \left(\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx \right)$, $\mu'_{\tilde{X}}(x)$ 为标准隶属函数。

为获得等价正态随机变量的概率密度函数, 需确定其均值和标准差。根据文献 [178-179], 等价正态随机变量可定义为与模糊变量具有相同熵的随机变量, 即:

$$H_{X_{eq}} = G_{\tilde{X}} \quad (3-15)$$

式中, X_{eq} 为等价正态随机变量, $H_{X_{eq}}$ 为等价正态随机变量的概率熵。

结合式(3-13)和(3-15), 可得:

$$\sigma_{X_{eq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{G_{\tilde{X}} - 0.5} \quad (3-16)$$

式中, $\sigma_{X_{eq}}$ 为等价正态随机变量的标准差。

明显地, 通过式(3-16)只能确定等价正态随机变量的标准差, 如何得到等价正态随机变量的均值仍然是一个值得深入研究的问题。一般情况下, 对于正态型凸模糊集, 可将隶属函数的对称中心视为等价正态随机变量的均值。此时, 等价正态随机变量的概率密度函数可表示为:

$$f_{X_{eq}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_{eq}}} e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma_{X_{eq}}^2}} \quad (3-17)$$

式中, $f_{X_{eq}}(x)$ 为 X_{eq} 的概率密度函数, $\hat{x}$ 为隶属函数的对称中心。

正态型凸模糊变量只是模糊集中的特例, 对于隶属函数为非标准型或非对称型, 如梯形、S 型等的模糊变量, 等价正态随机变量的均值仍然无法确定。

由式(3-14)可知, $\mu'_{\tilde{X}}(x)$ 满足以下条件:

$$\mu'_{\tilde{X}}(x) = \mu_{\tilde{X}}(x) / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx \geq 0 \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu'_{\tilde{X}}(x) dx &= \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \left[\mu_{\tilde{X}}(x) / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx \right] dx \\ &= \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3-19)$$

根据式(3-18)和(3-19), $\mu'_{\tilde{X}}(x)$ 满足概率密度函数的性质, 因此, 可将 $\mu'_{\tilde{X}}(x)$ 定义为连续随机变量 X_n 的概率密度函数。令 X_n 为 $\tilde{X}$ 的名义随机变量, 则可得到:

$$f_{X_n}(x) = \mu_{\tilde{X}}(x) / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx \quad (3-20)$$

式中, $f_{X_n}(x)$ 为 X_n 的概率密度函数, $x \in [U^{lb}, U^{ub}]$ 。

结合式(3-12)和(3-20), 可得 X_n 的概率熵:

$$\begin{aligned} H_{X_n} &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_n}(x) \ln f_{X_n}(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{X}}(x) / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx \ln \left[\mu_{\tilde{X}}(x) / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx \right] dx \end{aligned} \quad (3-21)$$

由式(3-14)和(3-21)可知, X_n 的概率熵等于 $\tilde{X}$ 的模糊熵。下面将详细探讨随机变量 X_n 与模糊变量 $\tilde{X}$ 之间的等价性。

设随机应力 S 和模糊强度 $\tilde{R}$, 其概率密度函数和隶属函数分别为 $f_s(s), s \in (-\infty, +\infty)$ 与 $\int_U \mu_{\tilde{R}}(r) / r, r \in U = [U^{lb}, U^{ub}]$ 。 $\tilde{A}$ 表示模糊安全事件, $\tilde{A}$ 的隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(s)$ 定义为:

(1) $s < U^{lb}$, 则结构处于绝对安全状态, $\mu_{\tilde{A}}(s) = 1$;

(2) $s > U^{ub}$, 则结构完全失效, $\mu_{\tilde{A}}(s) = 0$;

(3) $U^{lb} \leq s \leq U^{ub}$, 则可将区间 $[U^{lb}, U^{ub}]$ 划分为两部分, 即 $[U^{lb}, s]$ 和 $[s, U^{ub}]$ 。在一定程度上, 区间 $[U^{lb}, s]$ 可视为失效域, 相应地, 区间 $[s, U^{ub}]$ 可视为安全域。此时, 将 $\tilde{A}$ 的隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(s)$ 定义为 $\tilde{R}$ 安全域包络面积与整个隶属函数包络面积的比值, 即:

$$\mu_{\tilde{A}}(s) = \int_s^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s') ds' / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s) ds, \quad s \in [U^{lb}, U^{ub}] \quad (3-22)$$

综上, 模糊安全事件 $\tilde{A}$ 的隶属函数可表示为分段函数:

$$\mu_{\tilde{A}}(s) = \begin{cases} 1, & -\infty < s < U^{lb} \\ \int_s^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s') ds' / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s) ds, & U^{lb} \leq s \leq U^{ub} \\ 0, & U^{lb} < s < +\infty \end{cases} \quad (3-23)$$

Zadeh^[180]给出了著名的模糊事件概率公式:

$$P(\tilde{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{A}}(x) dP \quad (3-24)$$

根据模糊安全事件隶属函数的定义, 式(3-24)可转换为:

$$P(\tilde{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{A}}(s) f_s(s) ds \quad (3-25)$$

此时, 模糊可靠度为:

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_f &= P(\tilde{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{A}}(s) f_s(s) ds \\
 &= \int_{-\infty}^{U^{lb}} 1 \cdot f_s(s) ds + \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \left[\int_s^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s') ds' / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s) ds \right] \cdot f_s(s) ds \\
 &\quad + \int_{U^{ub}}^{+\infty} 0 \cdot f_s(s) ds \\
 &= \int_{-\infty}^{U^{lb}} f_s(s) ds + \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \left[\int_s^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s') ds' \right] \cdot f_s(s) ds}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s) ds}
 \end{aligned} \tag{3-26}$$

假设随机应力 S 和模糊强度 $\tilde{R}$ 相互独立，且概率密度函数和隶属函数分别用 $f_s(s)$ 和 $\mu_{\tilde{R}}(r)$ 表示。根据应力-强度干涉理论，结构的模糊可靠度可定义为：

$$\tilde{R}_s \triangleq \Pr\{\tilde{R} \succ S\} \tag{3-27}$$

式中， $\tilde{R}_s$ 为模糊可靠度。

结合式(3-20)和(3-27)，将式(3-27)中的模糊强度 $\tilde{R}$ 用 R_n 代替，可得：

$$\begin{aligned}
 R_s &= \Pr\{R_n > S\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{R}}(r) / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr \int_{-\infty}^r f_s(s) ds dr \\
 &= \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) / \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr \int_{-\infty}^r f_s(s) ds dr \\
 &= \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) \cdot \int_{-\infty}^r f_s(s) ds dr}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr}
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

式中， R_s 为等价转换后的可靠度， R_n 为模糊强度 $\tilde{R}$ 的名义随机变量。

通过分部积分，式(3-28)可转换为：

$$\begin{aligned}
 R_s &= \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) \int_{-\infty}^r f_s(s) ds dr}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \\
 &= \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \left[\int_{-\infty}^r f_s(s) ds \right] d \left[\int_{-\infty}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right]}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr}
 \end{aligned} \tag{3-29}$$

注意到，当 $r' < U^{lb}$ 时， $\mu_{\tilde{R}}(r') = 0$ ，则有：

$$d \left[\int_{-\infty}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right] = d \left[\int_{U^{lb}}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right] \tag{3-30}$$

结合式(3-29)和(3-30)可得：

$$\begin{aligned}
 R_s &= \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \left[\int_{-\infty}^r f_s(s) ds \right] d \left[\int_{-\infty}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right]}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \\
 &= \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \left[\int_{-\infty}^r f_s(s) ds \right] d \left[\int_{U^{lb}}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right]}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \\
 &= \left. \frac{\left[\int_{-\infty}^r f_s(s) ds \right] \left[\int_{U^{lb}}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right]}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \right|_{U^{lb}}^{U^{ub}} - \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \left[\int_{U^{lb}}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right] d \left[\int_{-\infty}^r f_s(s) ds \right]}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr}
 \end{aligned} \tag{3-31}$$

由于 $\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r') dr' = 0$ ，同时， $d \left[\int_{-\infty}^r f_s(s) ds \right] = f_s(r) dr$ ，因此有：

$$\begin{aligned}
 R_s &= \left. \frac{\left[\int_{-\infty}^r f_s(s) ds \right] \left[\int_{U^{lb}}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right]}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \right|_{U^{lb}}^{U^{ub}} \\
 &\quad - \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \left[\int_{U^{lb}}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right] d \left[\int_{-\infty}^r f_s(s) ds \right]}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \\
 &= \int_{-\infty}^{U^{ub}} f_s(s) ds - \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} f_s(r) \cdot \left[\int_{U^{lb}}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right] dr}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr}
 \end{aligned} \tag{3-32}$$

式(3-32)右端第二项又可改写为：

$$\begin{aligned}
 &\quad - \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} f_s(r) \left[\int_{U^{lb}}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right] dr}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \\
 &= - \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} f_s(r) \left[\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r') dr' - \int_r^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right] dr}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \\
 &= - \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} f_s(r) dr + \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} f_s(r) \int_r^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r') dr' dr}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr}
 \end{aligned} \tag{3-33}$$

因此，根据式(3-32)和(3-33)可得：

$$\begin{aligned}
 R_s &= \int_{-\infty}^{U^{ub}} f_s(s) ds - \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} f_s(r) \left[\int_{U^{lb}}^r \mu_{\tilde{R}}(r') dr' \right] dr}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \\
 &= \int_{-\infty}^{U^{ub}} f_s(s) ds - \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} f_s(r) dr + \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} f_s(r) \int_r^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r') dr' dr}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(r) dr} \\
 &= \int_{-\infty}^{U^{lb}} f_s(s) ds + \frac{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \left[\int_s^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s') ds' \right] f_s(s) ds}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{R}}(s) ds}
 \end{aligned} \tag{3-34}$$

显然，式(3-34)与(3-26)完全相同，即通过应力-强度干涉模型计算的可靠度与利用模糊事件概率公式计算的可靠度相等，因此，模糊变量向名义随机变量转换的合理性得到了证明。

X_{eq} 和 X_n 为模糊变量 $\tilde{X}$ 的等价随机变量和名义随机变量，若设定二者的均值相等，即：

$$\begin{aligned}
 \mu_{X_{eq}} &= E(X_{eq}) \triangleq E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_n}(x) dx \\
 &= \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} x \mu_{\tilde{X}}(x) / \left[\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx \right] dx
 \end{aligned} \tag{3-35}$$

式中， $\mu_{X_{eq}}$ 为 X_{eq} 的均值。

式(3-35)中，积分式 $\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx$ 的值为常数，则有：

$$\begin{aligned}
 E(X_{eq}) &= \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} x \mu_{\tilde{X}}(x) / \left[\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx \right] dx \\
 &= \frac{1}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{X}}(x) dx} \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} x \mu_{\tilde{X}}(x) dx
 \end{aligned} \tag{3-36}$$

至此，等价正态随机变量的概率密度函数可以表示为：

$$f_{X_{eq}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_{eq}}} e^{-\frac{(x-\mu_{X_{eq}})^2}{2\sigma_{X_{eq}}^2}} \tag{3-37}$$

基于熵值不变性，通过设定等价随机变量和名义随机变量均值相等，可将模糊变量转换为正态随机变量，这即为本章所提出的等效转换方法。通过该方法，原先同时考虑模糊和 p -box 变量的可靠性分析问题，转化成正态随机变量和 p -box 变量同时存在下的可靠性分析问题。这样，可靠性分析所面临的关键问题即为系统失效

概率上、下界的求解。下面将基于等效转换方法，并结合鞍点近似法，提出模糊变量和 p -box 变量混合下的系统可靠性分析新方法。

3.4 基于等效转换方法的可靠性分析方法

为计算模糊变量和 p -box 变量同时存在下系统失效概率的上、下界，基于等效转换方法的可靠性分析过程分为以下三个阶段：(1)等效转换阶段；(2)仿真阶段；(3)分析求解阶段。在步骤(1)中，所有的模糊变量均转换为正态随机变量，这样，系统的输入变量转变为正态随机变量和 p -box 变量。在步骤(2)中，分别对正态随机变量和 p -box 变量进行拉丁超立方抽样，随后通过优化方法获取性能函数的最大值和最小值。在步骤(3)中，首先计算最好和最坏情况下的鞍点，随后确定失效概率的上、下界。基于等效转换方法的系统可靠性分析流程如图 3-2 所示，接下来将对每个阶段进行详细阐述。

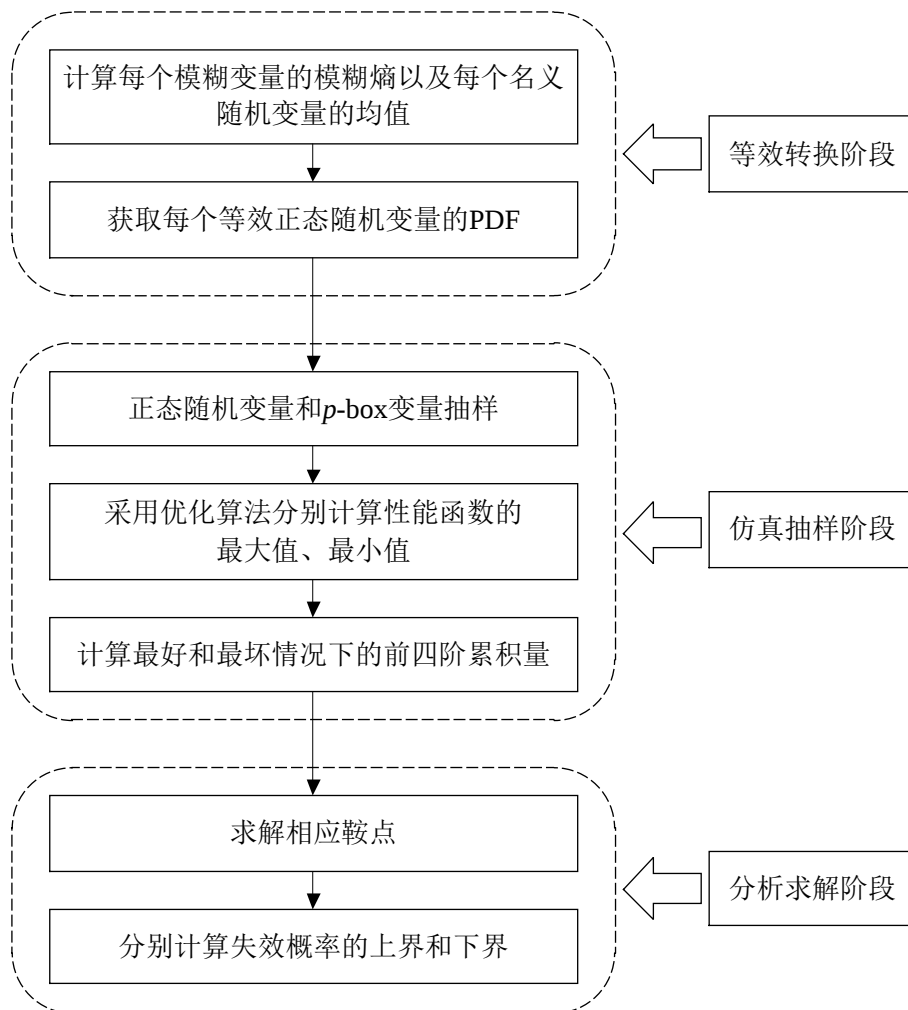


图 3-2 基于等效转换方法的系统可靠性分析流程图

3.4.1 模糊随机变量向正态随机变量转换

假设系统的输入包含 n 个模糊变量和 k 个 p -box 变量, 其输入变量和系统性能函数可分别用 $\mathbf{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k)$ 和 $Z_s = g(\mathbf{X})$ 表示。通过 3.3 小节所提出的等效转换方法, 可将所有的模糊变量转换为正态随机变量, 并令转换之后的系统性能函数为 $Z'_s = g(\mathbf{X}')$, 其中 $\mathbf{X}' = (X_1^{eqv}, X_2^{eqv}, \dots, X_n^{eqv}, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k)$ 。此时, 原始随机变量和 p -box 变量混合的可靠性分析问题转化为正态随机变量和 p -box 变量混合下的可靠性分析问题。

3.4.2 随机变量和 p -box 变量拉丁超立方抽样

在相同精度下, 拉丁超立方抽样 (Latin Hypercube Sampling, LHS) 往往比 MCS 所需的抽样数更少, 且能对每一变量在整个范围内进行有效抽样, 因此, 本文选用拉丁超立方抽样来生成样本。

对于概率密度函数为 $\phi_{X_i^{eqv}}(x_i^{eqv})$ 的正态随机变量 $X_i^{eqv} (i=1, 2, \dots, n)$, X_i^{eqv} 的第 j 个样本 $x_i^{eqv,j}$ 可由式(3-38)通过逆变换生成。

$$x_i^{eqv,j} = \Phi_{X_i^{eqv}}^{-1}(u_i^j), j=1, 2, \dots, m \quad (3-38)$$

式中, $\Phi_{X_i^{eqv}}^{-1}(\cdot)$ 为 $\Phi_{X_i^{eqv}}(\cdot)$ 的逆函数, $\Phi_{X_i^{eqv}}(\cdot)$ 为正态随机变量 X_i^{eqv} 的累积分布函数, u_i^j 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, m 为样本大小。

采用相似的方法, 可生成 p -box 变量的样本。由于 p -box 变量的累积分布函数位于区间内, 而不是确定的分布, 因此, 通过逆变换方法生成的样本相应地为一区间, 如图 3-3 所示。

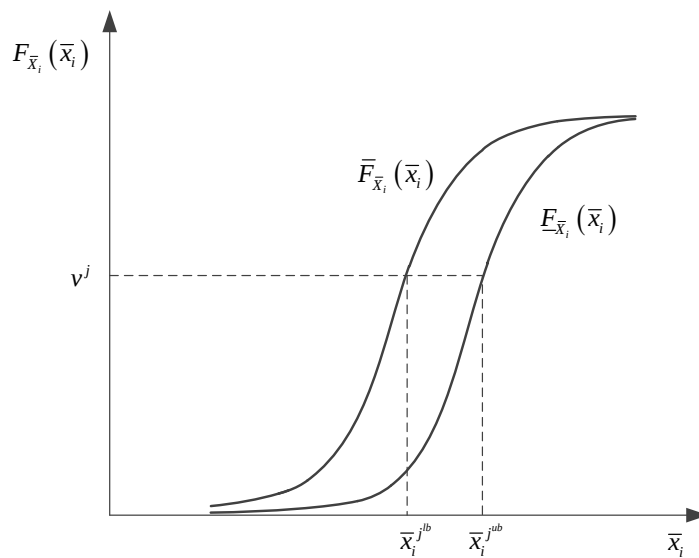


图 3-3 p -box 变量 $\bar{X}_i$ 的第 j 个样本

用 $\bar{x}_i^{jub}$ 和 $\bar{x}_i^{jlb}$ ($i=1,2,\dots,k$) 分别表示 $\bar{X}_i$ 第 j 个样本的上界和下界, 则有:

$$\bar{x}_i^{jub} = F_{\bar{X}_i}^{-1}(v^j), j=1,2,\dots,m \quad (3-39)$$

$$\bar{x}_i^{jlb} = \bar{F}_{\bar{X}_i}^{-1}(v^j), j=1,2,\dots,m \quad (3-40)$$

式中, $F_{\bar{X}_i}^{-1}(\cdot)$ 和 $\bar{F}_{\bar{X}_i}^{-1}(\cdot)$ 分别为 p -box 变量 $\bar{X}_i$ 累积分布函数上界和下界的逆函数, v^j 为区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, m 为样本数。

设通过拉丁超立方抽样获得 $\mathbf{X}'$ 的 m 个样本为 $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_m$, 其中 $\mathbf{x}'_j$ ($1 \leq j \leq m$) 表示 $\mathbf{X}'$ 的第 j 个样本, 且 $\mathbf{x}'_j = \{x_1^{eqv,j}, \dots, x_n^{eqv,j}, [\bar{x}_1^{jlb}, \bar{x}_1^{jub}], \dots, [\bar{x}_k^{jlb}, \bar{x}_k^{jub}]\}$ 。样本 $\mathbf{x}'_j$ ($1 \leq j \leq m$) 中的 $[\bar{x}_i^{jlb}, \bar{x}_i^{jub}]$, ($i=1,2,\dots,k$) 为区间, 相应地, 性能函数 $Z'_s = g(\mathbf{X}')$ 的值也位于一个区间内。 Z'_s 的最大值和最小值可以计算为:

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_s{}^{jub} = \max g(x_1^{eqv,j}, x_2^{eqv,j}, \dots, x_n^{eqv,j}, \bar{x}_1^j, \bar{x}_2^j, \dots, \bar{x}_k^j) \\ z'_s{}^{jlb} = \min g(x_1^{eqv,j}, x_2^{eqv,j}, \dots, x_n^{eqv,j}, \bar{x}_1^j, \bar{x}_2^j, \dots, \bar{x}_k^j) \\ \text{s.t.} \\ \bar{x}_1^{jlb} \leq \bar{x}_1^j \leq \bar{x}_1^{jub} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \bar{x}_k^{jlb} \leq \bar{x}_k^j \leq \bar{x}_k^{jub} \end{array} \right. \quad (3-41)$$

式中, $z'_s{}^{jub}$ 为系统性能函数在第 j 个样本下的最大值, $z'_s{}^{jlb}$ 为最小值。

将 m 个样本值代入式(3-41), 共生成系统性能函数 $Z'_s = g(\mathbf{X}')$ 的 m 个最大值和最小值, 可分别表示为:

$$(z_s'^{1ub}, z_s'^{2ub}, \dots, z_s'^{mub}) \quad (3-42)$$

和

$$(z_s'^{1lb}, z_s'^{2lb}, \dots, z_s'^{mlb}) \quad (3-43)$$

根据 3.2.2 小节所介绍的鞍点近似法, 最好和最坏情况下的累积母函数可分别计算为:

$$K^{best}(\xi) = k_1^{best} \xi + \frac{k_2^{best} \xi^2}{2!} + \frac{k_3^{best} \xi^3}{3!} + \frac{k_4^{best} \xi^4}{4!} \quad (3-44)$$

$$K^{worst}(\xi) = k_1^{worst} \xi + \frac{k_2^{worst} \xi^2}{2!} + \frac{k_3^{worst} \xi^3}{3!} + \frac{k_4^{worst} \xi^4}{4!} \quad (3-45)$$

式中:

$$k_1^{best} = \frac{s_1^{best}}{m} \quad (3-46)$$

$$k_2^{best} = \frac{m(s_2^{best}) - (s_1^{best})^2}{m(m-1)} \quad (3-47)$$

$$k_3^{best} = \frac{2(s_1^{best})^3 - 3m(s_1^{best})(s_2^{best}) + m^2 s_3^{best}}{m(m-1)(m-2)} \quad (3-48)$$

$$k_4^{best} = \frac{-6(s_1^{best})^4 + 12m(s_1^{best})^2(s_2^{best}) - 3m(m-1)(s_2^{best})^2 - 4m(m+1)(s_1^{best})(s_3^{best}) + m^2(m+1)(s_4^{best})}{m(m-1)(m-2)(m-3)} \quad (3-49)$$

$$s_i^{best} = \sum_{j=1}^m (z_s'^{jub})^i, (i=1, 2, 3, 4) \quad (3-50)$$

$$k_1^{worst} = \frac{s_1^{worst}}{m} \quad (3-51)$$

$$k_2^{worst} = \frac{m(s_2^{worst}) - (s_1^{worst})^2}{m(m-1)} \quad (3-52)$$

$$k_3^{worst} = \frac{2(s_1^{worst})^3 - 3m(s_1^{worst})(s_2^{worst}) + m^2(s_3^{worst})}{m(m-1)(m-2)} \quad (3-53)$$

$$k_4^{worst} = \frac{-6(s_1^{worst})^4 + 12m(s_1^{worst})^2(s_2^{worst}) - 3m(m-1)(s_2^{worst})^2 - 4m(m+1)(s_1^{worst})(s_3^{worst}) + m^2(m+1)(s_4^{worst})}{m(m-1)(m-2)(m-3)} \quad (3-54)$$

$$s_i^{worst} = \sum_{j=1}^m (z_s'^{jlb})^i, (i=1, 2, 3, 4) \quad (3-55)$$

3.4.3 可靠度计算

根据式(3-7)可知，最好和最坏情况下的鞍点分别为式(3-56)和(3-57)的解。

$$\frac{dK^{best}(\xi)}{d\xi} = k_1^{best} + k_2^{best}\xi + \frac{k_3^{best}\xi^2}{2} + \frac{k_4^{best}\xi^3}{6} = z_s' \quad (3-56)$$

$$\frac{dK^{worst}(\xi)}{d\xi} = k_1^{worst} + k_2^{worst}\xi + \frac{k_3^{worst}\xi^2}{2} + \frac{k_4^{worst}\xi^3}{6} = z_s' \quad (3-57)$$

显然，式(3-56)和(3-57)均存在三个解。对于解的选取，Yuen 等^[169]进行了详细

研究, 如表 3-1 和 3-2 所示。一旦获得了鞍点 ξ_s^{*best} 和 ξ_s^{*worst} , 结合式(3-9)-(3-11), 则可对失效概率的上、下界进行计算。

$$P_f^{ub} = \Pr\{Z_s'^{lb} \leq z_s'\} = \Phi(w^{worst}) + \phi(w^{worst}) \left(\frac{1}{w^{worst}} - \frac{1}{v^{worst}} \right) \quad (3-58)$$

$$P_f^{lb} = \Pr\{Z_s'^{ub} \leq z_s'\} = \Phi(w^{best}) + \phi(w^{best}) \left(\frac{1}{w^{best}} - \frac{1}{v^{best}} \right) \quad (3-59)$$

式中:

$$w^{worst} = \text{sgn}(\xi_s^{*worst}) \left\{ 2 \left[\xi_s^{*worst} z_s' - K(\xi_s^{*worst}) \right] \right\}^{1/2} \quad (3-60)$$

$$v = \xi_s^{*worst} \left[K''(\xi_s^{*worst}) \right]^{1/2} \quad (3-61)$$

$$w^{best} = \text{sgn}(\xi_s^{*best}) \left\{ 2 \left[\xi_s^{*best} z_s' - K(\xi_s^{*best}) \right] \right\}^{1/2} \quad (3-62)$$

$$v = \xi_s^{*best} \left[K''(\xi_s^{*best}) \right]^{1/2} \quad (3-63)$$

表 3-1 不同情况下的最坏鞍点 ξ_s^{*worst}

情况分类	最坏解
$k_4^{worst} < 0$	$\xi_s^{lb} = \frac{k_3^{worst} - \sqrt{(k_3^{worst})^2 - 2(k_2^{worst})(k_4^{worst})}}{-k_4^{worst}}$ $\xi_s^{ub} = \frac{k_3^{worst} + \sqrt{(k_3^{worst})^2 - 2(k_2^{worst})(k_4^{worst})}}{-k_4^{worst}}$ $\xi_s^{*worst} \in (\xi_s^{lb}, \xi_s^{ub})$
$k_4^{worst} \geq 0,$ $\Delta = (k_3^{worst})^2 - 2(k_2^{worst})(k_4^{worst}) \leq 0$	$\xi_s^{*worst} \in R$
$k_4^{worst} \geq 0, k_3^{worst} > 0,$ $\Delta = (k_3^{worst})^2 - 2(k_2^{worst})(k_4^{worst}) > 0$	$\xi_s^{lb} = \frac{-k_3^{worst} + \sqrt{(k_3^{worst})^2 - 2(k_2^{worst})(k_4^{worst})}}{k_4^{worst}}$ $\xi_s^{*worst} \in (\xi_s^{lb}, +\infty)$
$k_4^{worst} \geq 0, k_3^{worst} < 0,$ $\Delta = (k_3^{worst})^2 - 2(k_2^{worst})(k_4^{worst}) > 0$	$\xi_s^{ub} = \frac{-k_3^{worst} - \sqrt{(k_3^{worst})^2 - 2(k_2^{worst})(k_4^{worst})}}{k_4^{worst}}$ $\xi_s^{*worst} \in (-\infty, \xi_s^{ub})$

表 3-2 不同情况下的最好鞍点 ξ_s^{*best}

情况分类	最好解
$k_4^{best} < 0$	$\xi_s^{lb} = \frac{k_3^{best} - \sqrt{(k_3^{best})^2 - 2(k_2^{best})(k_4^{best})}}{-k_4^{best}}$ $\xi_s^{ub} = \frac{k_3^{best} + \sqrt{(k_3^{best})^2 - 2(k_2^{best})(k_4^{best})}}{-k_4^{best}}$ $\xi_s^{*best} \in (\xi_s^{lb}, \xi_s^{ub})$
$k_4^{best} \geq 0,$ $\Delta = (k_3^{best})^2 - 2(k_2^{best})(k_4^{best}) \leq 0$	$\xi_s^{*best} \in R$
$k_4^{best} \geq 0, k_3^{best} > 0,$ $\Delta = (k_3^{best})^2 - 2(k_2^{best})(k_4^{best}) > 0$	$\xi_s^{lb} = \frac{-k_3^{best} + \sqrt{(k_3^{best})^2 - 2(k_2^{best})(k_4^{best})}}{k_4^{best}}$ $\xi_s^{*best} \in (\xi_s^{lb}, +\infty)$
$k_4^{worst} \geq 0, k_3^{worst} < 0,$ $\Delta = (k_3^{worst})^2 - 2(k_2^{worst})(k_4^{worst}) > 0$	$\xi_s^{ub} = \frac{-k_3^{worst} - \sqrt{(k_3^{worst})^2 - 2(k_2^{worst})(k_4^{worst})}}{k_4^{worst}}$ $\xi_s^{*worst} \in (-\infty, \xi_s^{ub})$

3.5 算例分析

航空发动机被誉为飞机的“心脏”，为飞机的动力源。随着工业水平的提高和科技的不断进步，人们对航空发动机的性能指标如费用、体积、功率、油耗、可靠性等都提出了更高的要求，同时，由于推重比的不断增加，使得发动机的结构更趋复杂。涡轮盘作为航空发动机的关键零部件，其设计质量直接关系到发动机的性能高低及其结构的完整性和可靠性。涡轮盘在工作时，转速较高且受高温高压燃气的作用，导致故障频发，造成重大财产损失甚至人员伤亡。因此，对涡轮盘进行可靠性分析是保障航空发动机安全运行的重要基础。本小节将分别采用本文所提方法和经大量抽样的 IMCS 方法，计算图 3-4 所示涡轮盘的可靠度，并将两种方法所得结果进行对比，以验证所提方法的准确性和工程适用性。



图 3-4 航空发动机涡轮盘示意图

对于图 3-4 所示的涡轮盘，其断裂判据的性能函数可表示为^[181]：

$$Z_s = \tilde{\sigma}_s S - \frac{C\omega^2}{2\pi} - 2\rho\omega^2 J \quad (3-64)$$

式中， $\tilde{\sigma}_s$, S , ω , ρ 和 J 分别为强度极限、截面面积、转速、密度和转动惯量。

由于加工工艺、材料性能以及测量等诸多不确定因素的影响，采用同一材料的不同试样测得的强度极限并非一个固定值，而是围绕某一固定值上下波动，因此，可用模糊变量描述强度极限的不确定性。在本例中，强度极限 $\tilde{\sigma}_s$ 为模糊变量，其隶属函数为式(3-65)，涡轮盘的其它参数见表 3-3。

$$\mu_{\tilde{\sigma}_s}(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma - 850}{250}, & 850 \text{ MPa} \leq \sigma < 1100 \text{ MPa} \\ 1, & \sigma = 1100 \text{ MPa} \\ \frac{1500 - \sigma}{400}, & 1100 \text{ MPa} < \sigma \leq 1500 \text{ MPa} \end{cases} \quad (3-65)$$

根据式(3-16)和式(3-36)，模糊强度极限 $\tilde{\sigma}_s$ 可等效转换为正态随机强度极限 σ_s^{eqv} ，且标准差和均值可分别计算为：

$$\sigma_{\sigma_s^{eqv}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{G_{\tilde{\sigma}_s} - 0.5} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(0.5 - \ln \frac{1}{325}\right) - 0.5} = 129.6562 \quad (3-66)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\sigma_s^{eqv}} &= \frac{1}{\int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \mu_{\tilde{\sigma}_s}(\sigma) d\sigma} \int_{U^{lb}}^{U^{ub}} \sigma \cdot \mu_{\tilde{\sigma}_s}(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{325} \times \left[\int_{850}^{1100} \frac{\sigma(\sigma - 850)}{250} d\sigma + \int_{1100}^{1500} \frac{\sigma(1500 - \sigma)}{400} d\sigma \right] \\ &= 1150 \end{aligned} \quad (3-67)$$

式中, $\sigma_{\sigma_s^{eqv}}$ 和 $\mu_{\sigma_s^{eqv}}$ 分别为等价强度极限 σ_s^{eqv} 的标准差与均值。

因此, 等价强度极限 σ_s^{eqv} 的概率密度函数为:

$$f_{\sigma_{eqv}}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 129.6562} e^{-\frac{(\sigma-1150)^2}{2 \times 129.6562^2}} \quad (3-68)$$

式中, $f_{\sigma_s^{eqv}}(\sigma)$ 为 σ_s^{eqv} 的概率密度函数。

表 3-3 涡轮盘参数^[182]

变量	均值	标准差	分布类型
S	$6.2048 \times 10^{-3} \text{m}^2$	1.2161×10^{-3}	Normal
C	[5.6682, 6.1682]	0.2222	Normal
ω	1293.2890 rad/s	50.6969	Normal
ρ	8240 kg/m ³	484.5120	Normal
J	$1.2147 \times 10^{-4} \text{m}^4$	7.1422×10^{-6}	Normal

根据文献[183], IMCS 常用于含有 p -box 变量的系统可靠性分析, 且精度较高, 但对于失效概率低的系统, 采用 IMCS 进行可靠性分析时, 需要很大的计算量。在本例中, 分别采用所提方法和 IMCS 计算涡轮盘在不同失效阈值下失效概率 $\Pr\{Z_s \leq z\}$ 的上下界, 并记录每种方法的函数调用次数, 对比结果见表 3-4 和图 3-5。

表 3-4 不同失效阈值下失效概率上界与下界

失效阈值 z	上下界	-1.5×10^6	0	1.5×10^6	样本量	函数调用次数
IMCS	P_f^{ub}	0.0001	0.0125	0.2487	100000	300000
	P_f^{lb}	0.00007	0.0082	0.2066		
所提方法	P_f^{ub}	0.0001	0.0108	0.2517	1000	3000
	P_f^{lb}	0.00006	0.0087	0.2089		

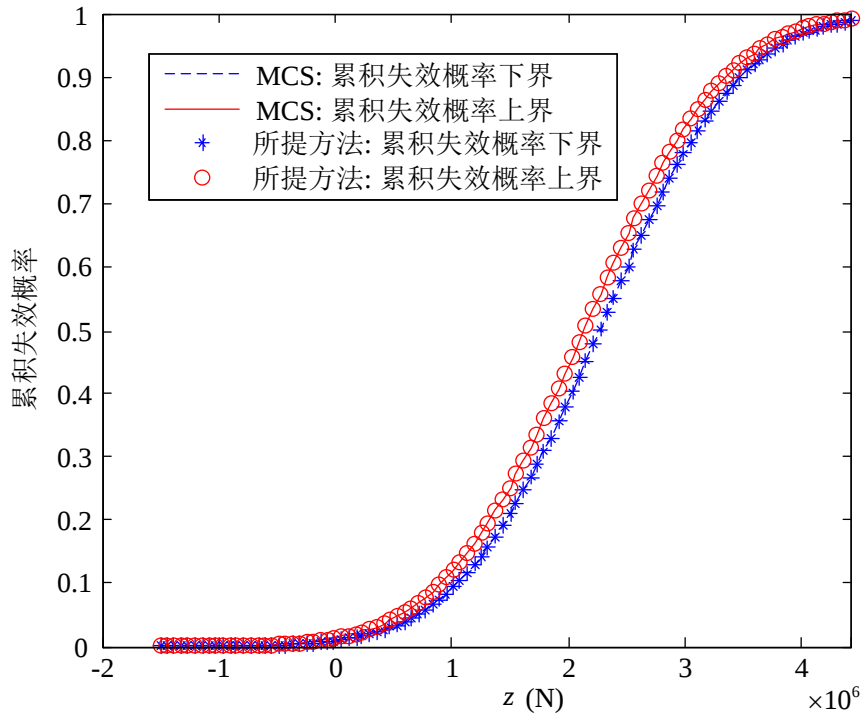


图 3-5 采用不同方法得到的涡轮盘累积失效概率

由表 3-4 和图 3-5 可知，在任一给定的失效阈值下，当涡轮盘参数中存在 p -box 变量时，结构失效概率均为一个区间。同时，采用本章所提方法和 IMCS 计算所得的累积失效概率较为接近，但前者所需的样本量仅为 IMCS 的百分之一，相应的函数调用次数也更少。对比结果表明：采用本章所提方法进行可靠性分析时，可得到与 IMCS 相近的计算结果，但所需样本量小，计算效率高。

3.6 本章小结

本章根据随机变量的概率熵等于模糊变量的模糊熵，将模糊变量向正态随机变量进行转换，并结合拉丁超立方抽样和鞍点近似，提出了基于等效转换的系统可靠性分析方法，以实现系统在模糊和 p -box 变量同时存在下的可靠性分析。采用本章所提方法对系统进行可靠性分析时，只需要计算失效概率的上界和下界，避免了复杂的积分过程，同时，本章所提方法的计算结果与 IMCS 相近，但所需的样本量较少，计算效率更高。需要指出的是，采用本章所提方法进行系统可靠性分析，得到的失效概率上界和下界均为近似值，而非精确值。然而，样本量越大，预测结果相应地就越准确，需要在精度和计算效率之间加以权衡。

第四章 考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法

本文第三章研究了混合不确定性下的系统可靠性分析方法，但该方法默认系统仅有完好和完全失效两种状态。随着机械产品结构的复杂化和功能的多元化，单个零部件或子系统的故障往往不会导致产品的完全失效，只会让产品的性能水平发生一定程度的下降，从而使整个系统呈现多态性。在对多态系统（Multi-State System, MSS）进行可靠性分析时，经常面临数据收集不准确、不充足等问题。再加上为了减轻计算量，常对连续状态系统进行近似。另外，多态系统中的元件或子系统之间常常存在相关性，因此，多态系统的可靠性分析往往较难开展。为解决以上问题和难点，本章基于模糊通用生成函数（Fuzzy Universal Generating Function, FUGF），引入零部件或子系统间的主从关系，提出一种考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法。

4.1 引言

受磨损、疲劳、变形等因素的影响，机械系统的性能水平不可避免地发生退化。伴随着系统的复杂化、精细化及多功能化，系统的性能由最简单的二元状态转变为随性能退化的多状态。如何准确、有效地评估不确定性下多态系统的可靠性已成为现今工程实际中亟待解决的难题。Hirsch 等^[85]首次提出多态系统这一概念，随后，Barlow 和 Wu^[86]、Neweihi 等^[87]将多态理论应用到单调关联系统。经过几十年的研究，针对多态系统已引入和发展了多种技术和方法，包括：布尔模型扩展方法、随机过程法、蒙特卡洛仿真法、通用生成函数（UGF）法或基于 UGF（UGF-based）的方法、递归算法。Ushakov^[101]将生成函数扩展为 UGF。随后，Levitin 等^[102-103]、Lisnianski 和 Ding^[104]分别将 UGF 方法引入到可靠性分析领域中。Levitin 等^[102]通过 UGF 方法对多态串并联系统进行了冗余优化。随后，Levitin^[103]又采用 UGF 方法对含有两种失效模式的多态系统的可靠性进行评估。同时，Lisnianski 和 Ding^[104]联合随机过程方法与通用生成函数方法来计算多态系统的可靠度。Ding^[105]利用模糊通用生成函数来评估多态系统的可靠性。Zuo 和 Tian^[106]提出一种递归方法评估广义多态 k/n 系统的可靠性。Li 和 Zuo^[107]扩展两种多态加权 k/n 系统，提出应用递归算法评估可靠性。Sharma 等^[108]针对多态串并联系统中的异构冗余分配问题，提出了在给定可靠性约束条件和负载要求下的可靠性设计优化方法。Levitin 和 Xing^[109]提出一种计算共因失效下复杂串并联多态系统性能分布的算法。

综上，针对多态系统的可靠性评估已开展了较多研究工作，也取得了较为丰富

的成果。但尚未在基于通用生成函数或模糊通用生成函数的可靠性分析方法中考虑元件或子系统之间的主从关系。因此，本章将主从关系引入到多态系统，结合模糊通用生成函数，提出考虑相关性的模糊多态系统可靠性分析新方法。

4.2 多态系统简介

在通信、电力、核工业、航空航天及其它许多领域中，系统及其元件通常具有多种性能水平（或多态特征），因此将其命名为多态系统。通常，多态系统用于具有诸如性能退化、不完全覆盖（Imperfect Coverage, IPC）以及维修复杂等特性的系统建模。传统二态系统仅有两种明确的状态：完好状态和完全失效状态，因此，二态系统可视为多态系统最简单的情形。多态系统与二态系统的区别如图 4-1 所示。

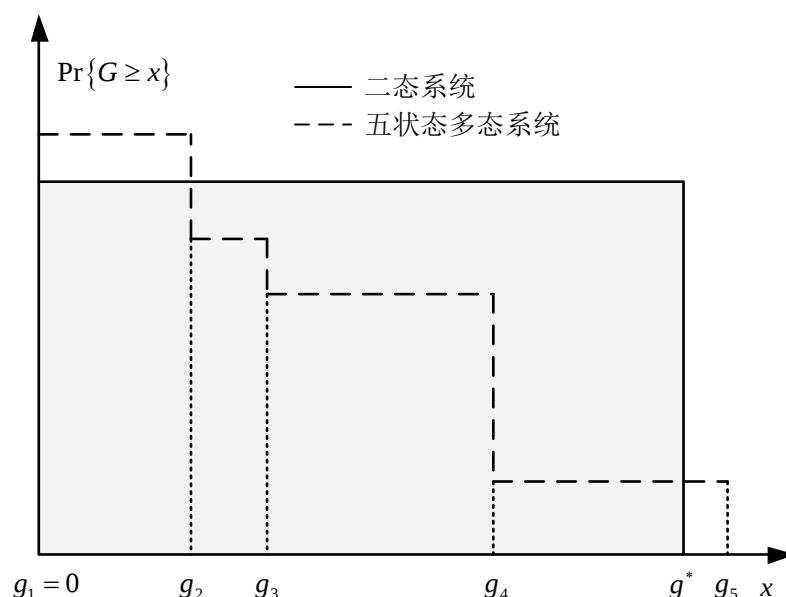


图 4-1 二态系统和多态系统的性能累积分布

图 4-1 中， g^* 为二态系统能达到的最大性能水平， $g_1 \sim g_5$ 分别为多态系统不同状态下的性能水平。

具有以下情形的系统均可认为是多态系统^[184]：

（1）系统包含不同的能对整个系统性能产生累积影响的二态单元，最典型的 k/n 系统就属于这种情形；

（2）由于元件性能退化，如疲劳、局部失效等，或外部环境变化而导致整个多态系统性能（或状态）退化。

假设多态系统由 n 个元件组成，元件 j ($1 \leq j \leq n$) 具有 k_j 种不同的状态，其相应

的性能水平可用以下集合表示：

$$\mathbf{g}_j = \{g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jk_j}\} \quad (4-1)$$

式中， g_{ji} 为元件 j 在状态 $i, i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$ 下的性能水平。

对任意时刻 $t \geq 0$ ，元件 j 的性能水平 $G_j(t)$ 为随机变量，且其值包含于 $\mathbf{g}_j: G_j(t) \in \mathbf{g}_j$ 。假设多态系统的工作周期为 T ，那么在时间段 $[0, T]$ 内，性能水平 $G_j(t)$ 是一个随机过程。对于任意时刻 t ，元件 j 处于不同性能水平的概率可表示为：

$$\mathbf{p}_j(t) = \{p_{j1}(t), p_{j2}(t), \dots, p_{jk_j}(t)\} \quad (4-2)$$

式中， $p_{ji}(t) = \Pr\{G_j(t) = g_{ji}\}, i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$ 。

元件状态构成了完备的事件集，且完备事件集中的各事件互斥，因此有：

$$\sum_{i=1}^{k_j} p_{ji}(t) = 1, 0 \leq t \leq T \quad (4-3)$$

假设多态系统有 K 个状态，且其性能水平 $g_i (i=1, 2, \dots, K)$ 能够通过系统元件或子系统的性能水平进行确定。多态系统可能拥有的最大状态数为：

$$K = \prod_{j=1}^n k_j \quad (4-4)$$

设 $\mathbf{V} = \{g_1, \dots, g_K\}$ ， $\mathbf{R}^n = \{g_{11}, \dots, g_{1k_1}\} \times \dots \times \{g_{n1}, \dots, g_{nk_n}\}$ 为两个空间，且空间 $\mathbf{R}^n$ 为 n 个元件所有可能的性能水平的集合，空间 $\mathbf{V}$ 为系统性能水平空间。函数 $f(G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t)): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}$ 为元件性能水平空间到系统性能水平空间的映射，将其定义为系统功能函数：

$$G_s(t) = f(G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t)) \quad (4-5)$$

由于不同元件性能水平组合可能会产生同一种系统性能水平，因此最终的系统性能水平数可能小于元件的组合数。若不考虑这种情况，则可得到系统在时刻 t 处于状态 i 的概率为：

$$p_i(t) = \prod_{j=1}^n p_{ji_j}(t), (i=1, 2, \dots, K; 1 \leq i_j \leq k_j) \quad (4-6)$$

式中， $p_i(t)$ 为整个系统在时刻 t 下处于状态 i 的概率， $p_{ji_j}(t)$ 为系统状态为 i 时元件 j 处于相应性能水平的概率。

4.3 考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法

4.3.1 模糊通用生成函数

考虑 n 个独立随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 及由 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 组成的任意函数 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，每个随机变量 X_i 的概率分布可表示为：

$$\mathbf{x}_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik_i}\}; \mathbf{p}_i = \{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik_i}\}, (i=1, 2, \dots, n) \quad (4-7)$$

式中， k_i 为随机变量 X_i 可能的取值个数。

对 X_i 进行 z -变换可得：

$$u_i(z) = \sum_{j_i=1}^{k_i} p_{ij_i} z^{x_{ij_i}}, (i=1, 2, \dots, n) \quad (4-8)$$

为得到函数 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的 z -变换，定义复合算子 $\otimes_f$ 为：

$$\begin{aligned} U_s(z) &= \otimes_f (u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z)) \\ &= \otimes_f \left(\sum_{j_1=1}^{k_1} p_{1j_1} z^{x_{1j_1}}, \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{2j_2} z^{x_{2j_2}}, \dots, \sum_{j_n=1}^{k_n} p_{nj_n} z^{x_{nj_n}} \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} \left[\prod_{i=1}^n p_{ij_i} z^{f(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{nj_n})} \right] \end{aligned} \quad (4-9)$$

式中， $U_s(z)$ 为函数 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的 z -变换。

基于 z -变换和复合算子的方法称为通用生成函数法（Universal Generating Function, UGF）。在通用生成函数法中，进行 z -变换后得到的函数称为 u -函数。 u -函数虽具有一般多项式的形式，但其乘法运算与普通多项式的乘法运算不同，完全遵循复合算子的定义。

为了便于理解，以一个包含两个随机变量 X_1 和 X_2 的简单系统为例，对通用生成函数方法进行阐述。已知系统性能水平 $G = f(X_1, X_2) = X_1 X_2$ 由两个随机变量 X_1 和 X_2 决定， X_1 和 X_2 的概率分布分别为：

$$\mathbf{x}_1 = \{x_{11}, x_{12}\} = \{4, 9\}; \mathbf{p}_1 = \{p_{11}, p_{12}\} = \{0.2, 0.8\}. \quad (4-10)$$

和

$$\mathbf{x}_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}\} = \{0, 1, 2\}; \mathbf{p}_2 = \{p_{21}, p_{22}, p_{23}\} = \{0.2, 0.2, 0.6\}. \quad (4-11)$$

根据式(4-8)，可得 X_1 和 X_2 的 u -函数：

$$u_1(z) = p_{11} z^{x_{11}} + p_{12} z^{x_{12}} = 0.2z^4 + 0.8z^9 \quad (4-12)$$

$$u_2(z) = p_{21} z^{x_{21}} + p_{22} z^{x_{22}} + p_{23} z^{x_{23}} = 0.2z^0 + 0.2z^1 + 0.6z^2 \quad (4-13)$$

对式(4-12)和(4-13)中的 u -函数运用复合算子,可得系统性能水平的 u -函数为:

$$\begin{aligned}
 U_s(z) &= \otimes_f(u_1(z), u_2(z)) \\
 &= \otimes_f(0.2z^4 + 0.8z^9, 0.2z^0 + 0.2z^1 + 0.6z^2) \\
 &= 0.04z^{4 \times 0} + 0.04z^{4 \times 1} + 0.12z^{4 \times 2} + 0.16z^{9 \times 0} + 0.16z^{9 \times 1} + 0.48z^{9 \times 2} \\
 &= 0.2z^0 + 0.04z^4 + 0.12z^8 + 0.16z^9 + 0.48z^{18}
 \end{aligned} \tag{4-14}$$

根据式(4-4),系统可能的最大状态数为 $K = 2 \times 3 = 6$ 。在式(4-14)中,由于存在不同元件性能水平组合对应同一个系统性能水平的情况,因此,状态数由 6 减少到 5。

模糊通用生成函数法是在通用生成函数法基础上考虑模糊性的一种方法,是通用生成函数法的延伸与扩展。二者区别仅在于处理系统的性能水平和相应概率的方式不同,通用生成函数法将其视为精确值,而在模糊通用生成函数法中,为考虑信息的模糊性而将系统的性能水平和(或)相应概率视为模糊值。

采用模糊通用生成函数可将系统 u -函数表示为:

$$\tilde{U}_s(z) = \tilde{\Omega}_\Theta(\tilde{u}_1(z), \tilde{u}_2(z), \dots, \tilde{u}_n(z)) = \sum_{i=1}^M \tilde{p}_i z^{\tilde{g}_i} \tag{4-15}$$

式中, $\tilde{U}_s(z)$ 为整个模糊多态系统的性能水平的 u -函数, $\tilde{\Omega}_\Theta$ 为模糊复合算子, M 为整个系统的状态数, $\tilde{g}_i$ 和 $\tilde{p}_i$ 分别为模糊性能水平和对应模糊概率。

4.3.2 考虑相关性的多态系统模糊可靠性建模与分析

传统多态系统模型认为构成系统的元件之间相互独立,这种假设往往不符合工程实际,因为系统的一个元件或子系统失效可能导致其它元件或子系统失效,甚至有时一个元件的性能水平可能受另外元件的状态控制。此外,传统多态系统模型将所有元件的性能水平及相应概率视为精确值,但实际中元件的性能水平及相应概率常常为无法确定的模糊值,例如,应力为 500MPa 左右,应力均值为 500MPa 的概率为 0.8 左右。因此,为提高模型的精度和工程适用性,元件的性能水平及其相应概率应视为模糊值,本文将基于模糊通用生成函数(Fuzzy Universal Generating Function, FUGF),提出考虑元件主从关系的多态系统模糊可靠性分析方法。

假设有一由 n 个元件组成的模糊多态系统,其中,元件 r 的状态会影响其它 $n-1$ 个相互独立的元件的性能水平。在这种情形下,可定义元件 r 为主元件,其它 $n-1$ 个元件为关联元件。主元件性能水平的概率分布表示为:

$$\tilde{\mathbf{g}}_r = \{\tilde{g}_r^1, \tilde{g}_r^2, \dots, \tilde{g}_r^{n_r}\}; \tilde{\mathbf{p}}_r = \{\tilde{p}_r^1, \tilde{p}_r^2, \dots, \tilde{p}_r^{n_r}\}. \tag{4-16}$$

式中, $\tilde{g}_r^1 \sim \tilde{g}_r^{n_r}$ 表示主元件 r 的 n_r 个性能水平, $\tilde{p}_r^1 \sim \tilde{p}_r^{n_r}$ 为对应的概率。

其它 $n-1$ 个关联元件性能水平的条件概率分布 (Conditional Probability Distribution, CPD) 为:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_{j|i} &= \{\tilde{g}_{j|i}^1, \tilde{g}_{j|i}^2, \dots, \tilde{g}_{j|i}^{m_{ji}}\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}_{j|i} &= \{\tilde{p}_{j|i}^1, \tilde{p}_{j|i}^2, \dots, \tilde{p}_{j|i}^{m_{ji}}\}, (i=1, 2, \dots, n_r; j=1, 2, \dots, n \text{ 且 } j \neq r)\end{aligned}\quad (4-17)$$

式中, m_{ji} 为元件 j 在状态 i 条件下的状态数。

根据式(4-17), 将元件 j 的模糊性能水平重新定义为:

$$\tilde{\mathbf{g}}_j = \bigcup_{i=1}^{n_r} \tilde{\mathbf{g}}_{j|i} = \{\tilde{g}_j^1, \tilde{g}_j^2, \dots, \tilde{g}_j^{n_j}\} \quad (4-18)$$

式中, n_j 为元件 j 的模糊水平数, 且 $n_j \leq \sum_{h=1}^{n_r} m_{jh}$, 相应的条件概率也可重新定义为:

$$\tilde{\mathbf{p}}'_{j|i} = \{\tilde{p}_{j|i}^1, \tilde{p}_{j|i}^2, \dots, \tilde{p}_{j|i}^{n_j}\}, (j=1, 2, \dots, n \text{ 且 } j \neq r; i=1, 2, \dots, n_r) \quad (4-19)$$

式中:

$$\tilde{p}_{j|i}^h = \begin{cases} 0, & \tilde{g}_j^h \notin \tilde{\mathbf{g}}_{j|i} \\ \tilde{p}_{j|i}^h, & \tilde{g}_j^h \in \tilde{\mathbf{g}}_{j|i} \end{cases}, (h=1, 2, \dots, n_j) \quad (4-20)$$

结合式(4-18)-(4-20), 元件 j 性能水平的条件概率分布可以表示为:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_j &= \{\tilde{g}_j^1, \tilde{g}_j^2, \dots, \tilde{g}_j^{n_j}\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}'_{j|1} &= \{\tilde{p}_{j|1}^1, \tilde{p}_{j|1}^2, \dots, \tilde{p}_{j|1}^{n_j}\} \\ \tilde{\mathbf{p}}'_{j|2} &= \{\tilde{p}_{j|2}^1, \tilde{p}_{j|2}^2, \dots, \tilde{p}_{j|2}^{n_j}\} \\ &\dots \\ \tilde{\mathbf{p}}'_{j|n_r} &= \{\tilde{p}_{j|n_r}^1, \tilde{p}_{j|n_r}^2, \dots, \tilde{p}_{j|n_r}^{n_j}\}\end{aligned}\quad (4-21)$$

将元件 j 的状态通过以下途径进行排序:

$$h < k \Leftrightarrow g_j^{h, \max} > g_j^{k, \max} \quad (4-22)$$

式中, $g_j^{h, \max} = \max\{g_j^h | g_j^h \in G_j^h\}$, $g_j^{k, \max} = \max\{g_j^k | g_j^k \in G_j^k\}$, G_j^h 和 G_j^k 为对象集合。

根据式(4-8), 元件 j 性能水平的 u -函数为:

$$\tilde{u}_j(z) = \sum_{h=1}^{n_j} \tilde{\mathbf{p}}_j^h z^{\tilde{g}_j^h} \quad (4-23)$$

式中, $\tilde{\mathbf{p}}_j^h, (h=1, 2, \dots, n_j)$ 为矢量, 且满足:

$$\tilde{\mathbf{p}}_j^h = (\tilde{p}_{j|1}^h, \tilde{p}_{j|2}^h, \dots, \tilde{p}_{j|n_r}^h) \quad (4-24)$$

对于整个模糊多态系统 (Fuzzy Multi-State System, FMSS), 其性能水平的 u -函数可计算为:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_s(z) &= \tilde{\Omega}_{\Theta}(\tilde{u}_1(z), \tilde{u}_2(z), \dots, \tilde{u}_n(z)) \\ &= \tilde{\Omega}_{\Theta}\left(\sum_{h=1}^{n_1} \tilde{\mathbf{p}}_1^h z^{\tilde{g}_1^h}, \sum_{h=1}^{n_2} \tilde{\mathbf{p}}_2^h z^{\tilde{g}_2^h}, \dots, \sum_{h=1}^{n_r} \tilde{\mathbf{p}}_r^h z^{\tilde{g}_r^h}, \dots, \sum_{h=1}^{n_n} \tilde{\mathbf{p}}_n^h z^{\tilde{g}_n^h}\right) \\ &= \sum_{i=1}^M \tilde{p}_i z^{\tilde{g}_i} \end{aligned} \quad (4-25)$$

式中, $\tilde{U}_s(z)$ 为整个模糊多态系统的性能水平的 u -函数, $\tilde{\Omega}_{\Theta}$ 为模糊复合算子, M 为整个系统的状态数, $\tilde{g}_i$ 和 $\tilde{p}_i$ 分别为性能水平和对应概率。

在传统的多态系统模型中, 若系统性能水平 g_i 不低于需求 d , 则认为系统性能在状态 i 下必然是完好的; 而当系统性能水平 g_i 低于需求 d 时, 则认为系统失效。在这两种情形下, 系统完好或失效的边界比较清晰。然而, 对于模糊多态系统模型, 边界则变得模糊。例如, 假定状态 i 下性能水平 $\tilde{g}_i$ 可表示为三角模糊数 (a^L, a^M, a^U) , 系统性能需求为常数 d 。根据图 4-2, 当 $a^L \geq d$ 时系统处于完全正常状态, 而当 $a^U < d$ 时系统则处于完全失效状态。然而, 当 $a^L < d \leq a^U$ 时, 状态 i 则为一个模糊状态, 此时系统可能正常工作, 也可能发生失效。

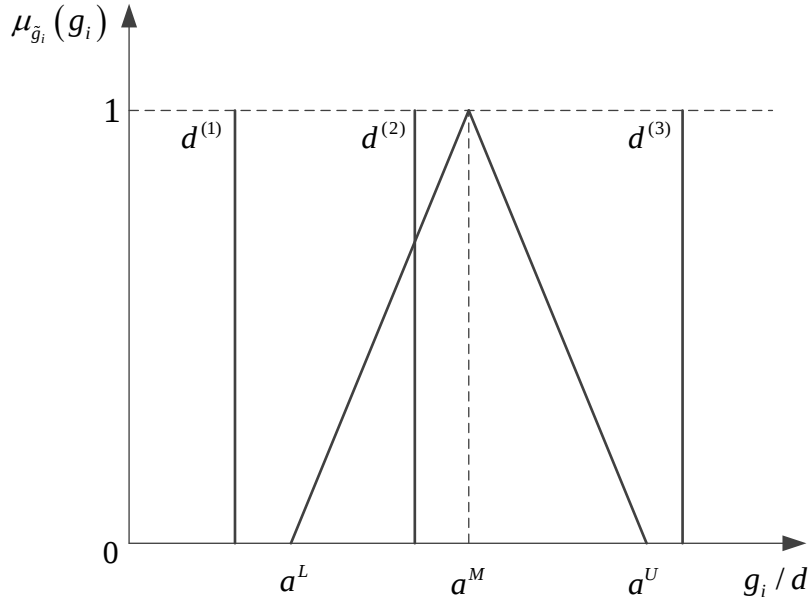


图 4-2 模糊性能水平与性能需求

为提高实际应用中的合理性, 有时将系统需求用模糊数 $\tilde{d}$ 表示, 若将系统性能

与需求之间的差定义为系统性能充裕度系数，则有：

$$\tilde{\phi}_i = \{\phi_i, \mu_{\tilde{\phi}_i}(\phi_i) | \phi_i = g_i - d, g_i \in G_i, d \in D\} \quad (4-26)$$

式中， $\mu_{\tilde{\phi}_i}(\phi_i) = \sup_{\phi_i = g_i - d} \min\{\mu_{\tilde{g}_i}, \mu_{\tilde{d}}\}$ ， $\mu_{\tilde{g}_i}$ 和 $\mu_{\tilde{d}}$ 分别是 $\tilde{g}_i$ 和 $\tilde{d}$ 的隶属函数， G_i 和 D 为对象集合，集合元素分别用 g_i 和 d 表示。对于状态 i ，若 $\phi_i \geq 0$ ，则系统性能水平充裕，系统完好；而当 $\phi_i < 0$ 时，则认为系统性能水平不足，系统失效。

Dhar^[185]将模糊集 $\tilde{\phi}_i : \Phi_i \rightarrow [0,1]$ 的势定义为模糊集的隶属度之和，即：

$$|\tilde{\phi}_i| = \sum_{\phi_i \in \Phi_i} \mu_{\tilde{\phi}_i}(\phi_i) \quad (4-27)$$

式中， $|\tilde{\phi}_i|$ 称为 $\tilde{\phi}_i$ 的势或 sigma-计数， Φ_i 为对象集合，其集合元素用 ϕ_i 表示。

设 Φ_i^+ 为 Φ_i 的一个子集，且满足：

$$\Phi_i^+ = \{\phi_i \geq 0 | \phi_i \in \Phi_i\} \quad (4-28)$$

和

$$\tilde{\phi}_i^+ = \{\phi_i^+, \mu_{\tilde{\phi}_i^+}(\phi_i^+) | \mu_{\tilde{\phi}_i^+}(\phi_i^+) = \mu_{\tilde{\phi}_i}(\phi_i^+), \phi_i^+ \in \Phi_i^+\} \quad (4-29)$$

根据式(4-27)，模糊集 $\tilde{\phi}_i^+$ 的势可计算为：

$$|\tilde{\phi}_i^+| = \sum_{\phi_i^+ \in \Phi_i^+} \mu_{\tilde{\phi}_i^+}(\phi_i^+) \quad (4-30)$$

定义模糊集 $\tilde{\phi}_i^+$ 的相对势为：

$$|\tilde{\phi}_i^+|_r = |\tilde{\phi}_i^+| / |\tilde{\phi}_i| \quad (4-31)$$

式中， $|\tilde{\phi}_i^+|_r$ 为相对势，且满足：

- (1) 状态 i 下的性能水平不足，则有 $|\tilde{\phi}_i^+|_r = 0$ ；
- (2) 状态 i 下的性能水平充裕，则有 $|\tilde{\phi}_i^+|_r = 1$ 。

定义模糊复合算子 $\tilde{\Omega}_{\text{sys}}$ ，则可通过式(4-32)计算模糊多态系统的模糊可靠性。

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tilde{\Omega}_{\text{sys}}(\tilde{U}_s(z), \tilde{d}) \\ &= \tilde{\Omega}_{\text{sys}}\left(\sum_{i=1}^M \tilde{p}_i z^{\tilde{g}_i}, \tilde{d}\right) \\ &= \tilde{\Omega}_{\text{sys}}\left\{\cdots, \left\{p_i |\tilde{\phi}_i^+|_r, \mu_{\tilde{p}_i}(p_i) | p_i \in P_i\right\}, \cdots\right\} \\ &= \left\{R, \mu_{\tilde{R}}(R) \middle| R = \sum_{i=1}^M p_i |\tilde{\phi}_i^+|_r, p_i \in P_i\right\} \end{aligned} \quad (4-32)$$

式中, $\mu_{\tilde{R}}(R) = \sup_{R = \sum_{i=1}^M p_i |\tilde{\phi}_i^+|_r} \min \{ \mu_{\tilde{p}_1}, \mu_{\tilde{p}_2}, \dots, \mu_{\tilde{p}_M} \}$, $\mu_{\tilde{p}_1}, \dots, \mu_{\tilde{p}_M}$ 分别为 $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_M$ 的隶属函数, $\tilde{R}$ 为多态系统的模糊可靠度。

综上, 对模糊多态系统, 将元件的性能水平及其相应概率视为模糊数以考虑二者的模糊性。同时, 通过理论分析并结合实践相结合, 实现系统主元件的识别, 并根据主元件与其他元件之间的关系获得其它元件的条件概率分布, 以此将元件之间的相关性引入到可靠性分析中。然后, 基于通用生成函数可获取整个模糊多态系统性能水平的概率分布, 并考虑状态 i 下的模糊性能需求, 利用式(4-27)、(4-30)和(4-31)分别计算模糊集 $\tilde{\phi}_i$ 和 $\tilde{\phi}_i^+$ 的势 $|\tilde{\phi}_i|$ 、 $|\tilde{\phi}_i^+|$ 以及相对势 $|\tilde{\phi}_i^+|_r$, 最后, 通过定义复合算子则可考虑系统的所有状态, 根据式(4-32)可得整个模糊多态系统的可靠度。此即为本章所提出的考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法, 具体实施流程如图 4-3 所示。

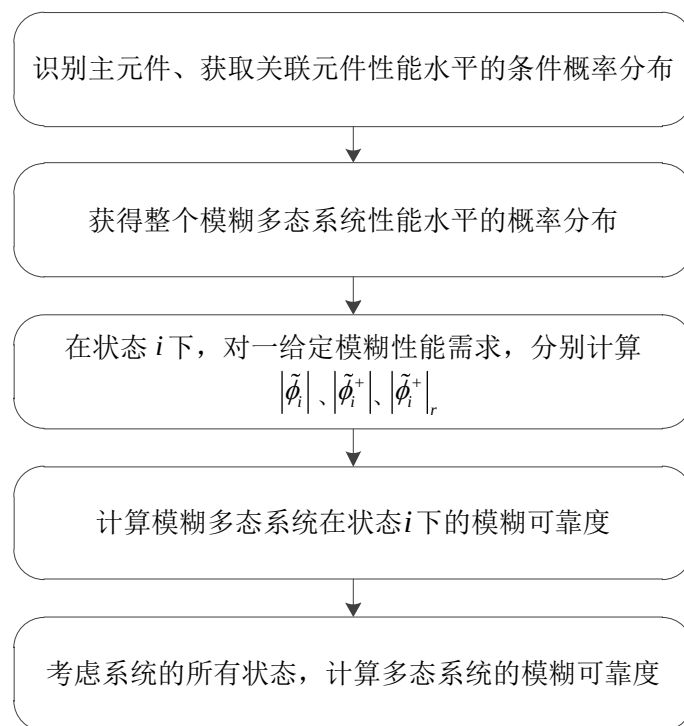


图 4-3 考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析流程

根据图 4-3 所示的流程图, 结合通用生成函数, 再定义复合算子则可在可靠性分析中考虑多态系统的模糊性和系统元件之间的相关性, 至此, 可靠性分析的关键点则为复合算子的定义和计算。目前, 由于工程实际的要求和科技的发展, 机械系统日趋复杂化, 往往具有不同类型的子系统, 而不同类型的系统其复合算子各不相同, 本章将在下一小节对不同系统的复合算子的定义和计算进行探讨。

4.3.3 模糊复合算子

4.3.3.1 串联模糊复合算子

对于串联系统，整个系统的性能水平取决于性能水平最低的元件。根据模糊数学的解析定理，系统性能 $\tilde{g}_i$ 可用 α -水平截集进行描述。

$$\begin{aligned}\tilde{g}_i &= \tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2}, \dots, \tilde{g}_{ji_j}, \dots, \tilde{g}_{ni_n}) \\ &= \bigcup_{\alpha} \alpha \tilde{g}_i^{\alpha} \\ &= \bigcup_{\alpha} \alpha [a_i^{\alpha}, c_i^{\alpha}]\end{aligned}\quad (4-33)$$

式中， $\tilde{\Omega}_s$ 为串联模糊复合算子， $\tilde{g}_{ji_j}$ ($j=1,2,\dots,n$) 状态 i 下元件 j 的性能水平， $\tilde{g}_i^{\alpha}$ 为模糊集 $\tilde{g}_i$ 的 α -水平截集，且 $\tilde{g}_i^{\alpha} = \{g_i | \mu_{\tilde{g}_i}(g_i) \geq \alpha\}$ 。

设串联系统包括两个元件，且其性能水平可分别用 $(a_{1i_1}, b_{1i_1}, c_{1i_1})$ 和 $(a_{2i_2}, b_{2i_2}, c_{2i_2})$ 表示。模糊集 $\tilde{g}_i$ 的 α -水平截集可用一个区间 $(a_i^{\alpha}, c_i^{\alpha})$ 表示，如图 4-4 所示， $\tilde{g}_i$ 可以图 4-4 中的实线表示。

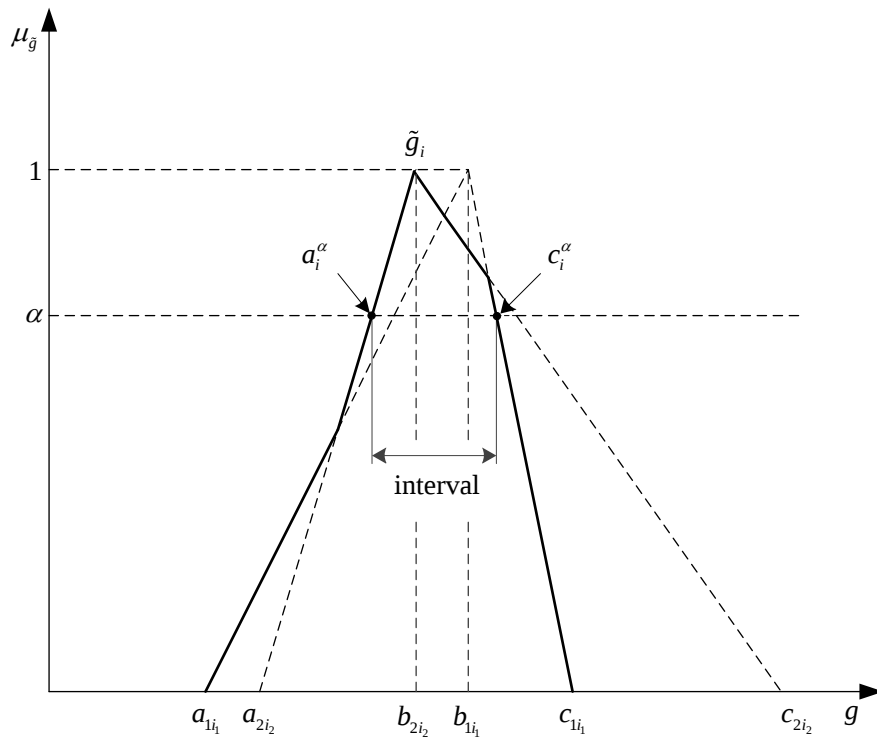


图 4-4 模糊集 $\tilde{g}_i$ 的 α -水平截集

式(4-33)可改写为：

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_i &= \tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2}) \\
 &= \bigcup_{\alpha} \alpha [a_i^{\alpha}, c_i^{\alpha}] \\
 &= \bigcup_{\alpha} \alpha [\min(a_{1i_1}^{\alpha}, a_{2i_2}^{\alpha}), \min(c_{1i_1}^{\alpha}, c_{2i_2}^{\alpha})]
 \end{aligned} \tag{4-34}$$

对于不同的数值关系，式(4-34)有 8 种可能的结果。

情形 1: $a_{1i_1} \leq a_{2i_2}$, $b_{1i_1} \leq b_{2i_2}$ 且 $c_{1i_1} \leq c_{2i_2}$ 。这种情形下， $\tilde{g}_{1i_1}$ 必然小于等于 $\tilde{g}_{2i_2}$ ， $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 可表示为一个三角模糊数 $(a_{1i_1}, b_{1i_1}, c_{1i_1})$ 。

情形 2: $a_{1i_1} \leq a_{2i_2}$, $b_{1i_1} \leq b_{2i_2}$ 且 $c_{1i_1} \geq c_{2i_2}$ 。这种情形下， $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 可由式(4-35)表示，如图 4-5 所示。

$$\mu_{\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})}(g) = \begin{cases} \frac{g - a_{1i_1}}{b_{1i_1} - a_{1i_1}}, & a_{1i_1} \leq g \leq b_{1i_1} \\ \frac{c_{1i_1} - g}{c_{1i_1} - b_{1i_1}}, & b_{1i_1} \leq g \leq \frac{c_{2i_2} b_{1i_1} - c_{1i_1} b_{2i_2}}{b_{1i_1} - c_{1i_1} - b_{2i_2} + c_{2i_2}} \\ \frac{c_{2i_2} - g}{c_{2i_2} - b_{2i_2}}, & \frac{c_{2i_2} b_{1i_1} - c_{1i_1} b_{2i_2}}{b_{1i_1} - c_{1i_1} - b_{2i_2} + c_{2i_2}} \leq g \leq c_{2i_2} \end{cases} \tag{4-35}$$

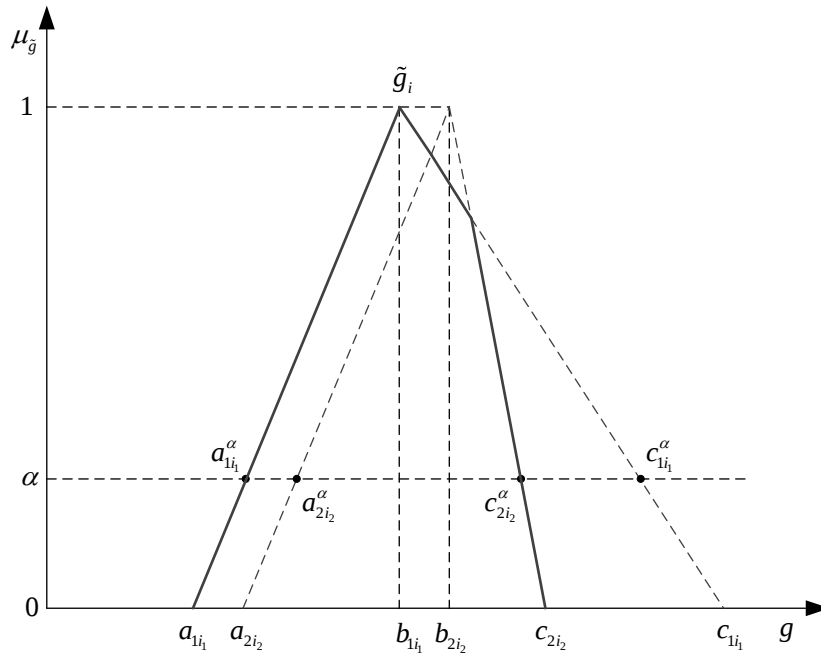


图 4-5 情形 2 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数

情形 3: $a_{1i_1} \leq a_{2i_2}$, $b_{1i_1} \geq b_{2i_2}$ 且 $c_{1i_1} \leq c_{2i_2}$ 。如图 4-4 所示， $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数为：

$$\mu_{\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})}(g) = \begin{cases} \frac{g - a_{1i_1}}{b_{1i_1} - a_{1i_1}}, & a_{1i_1} \leq g \leq \frac{a_{1i_1}b_{2i_2} - a_{2i_2}b_{1i_1}}{b_{2i_2} - b_{1i_1} - a_{2i_2} + a_{1i_1}} \\ \frac{g - a_{2i_2}}{b_{2i_2} - a_{2i_2}}, & \frac{a_{1i_1}b_{2i_2} - a_{2i_2}b_{1i_1}}{b_{2i_2} - b_{1i_1} - a_{2i_2} + a_{1i_1}} \leq g \leq b_{2i_2} \\ \frac{c_{2i_2} - g}{c_{2i_2} - b_{2i_2}}, & b_{2i_2} \leq g \leq \frac{c_{2i_2}b_{1i_1} - c_{1i_1}b_{2i_2}}{b_{1i_1} - c_{1i_1} - b_{2i_2} + c_{2i_2}} \\ \frac{c_{1i_1} - g}{c_{1i_1} - b_{1i_1}}, & \frac{c_{2i_2}b_{1i_1} - c_{1i_1}b_{2i_2}}{b_{1i_1} - c_{1i_1} - b_{2i_2} + c_{2i_2}} \leq g \leq c_{1i_1} \end{cases} \quad (4-36)$$

情形 4: $a_{1i_1} \leq a_{2i_2}$, $b_{1i_1} \geq b_{2i_2}$ 且 $c_{1i_1} \geq c_{2i_2}$ 。如图 4-6 所示, $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数为:

$$\mu_{\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})}(g) = \begin{cases} \frac{g - a_{1i_1}}{b_{1i_1} - a_{1i_1}}, & a_{1i_1} \leq g \leq \frac{a_{1i_1}b_{2i_2} - a_{2i_2}b_{1i_1}}{b_{2i_2} - b_{1i_1} - a_{2i_2} + a_{1i_1}} \\ \frac{g - a_{2i_2}}{b_{2i_2} - a_{2i_2}}, & \frac{a_{1i_1}b_{2i_2} - a_{2i_2}b_{1i_1}}{b_{2i_2} - b_{1i_1} - a_{2i_2} + a_{1i_1}} \leq g \leq b_{2i_2} \\ \frac{c_{2i_2} - g}{c_{2i_2} - b_{2i_2}}, & b_{2i_2} \leq g \leq c_{2i_2} \end{cases} \quad (4-37)$$

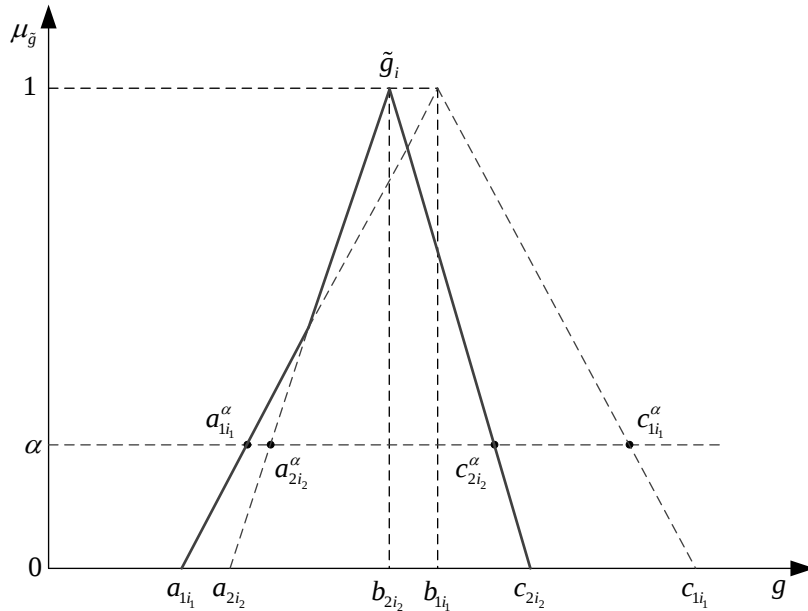


图 4-6 情形 4 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数

情形 5: $a_{1i_1} \geq a_{2i_2}$, $b_{1i_1} \geq b_{2i_2}$ 且 $c_{1i_1} \geq c_{2i_2}$ 。此种情形下, $\tilde{g}_{1i_1}$ 必然小于等于 $\tilde{g}_{2i_2}$, $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 可表示为一个简单的三角模糊数 $(a_{2i_2}, b_{2i_2}, c_{2i_2})$ 。

情形 6: $a_{1i} \geq a_{2i_2}$, $b_{1i} \geq b_{2i_2}$ 且 $c_{1i} \leq c_{2i_2}$ 。如图 4-7 所示, $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数为:

$$\mu_{\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i}, \tilde{g}_{2i_2})}(g) = \begin{cases} \frac{g - a_{2i_2}}{b_{2i_2} - a_{2i_2}}, & a_{2i_2} \leq g \leq b_{2i_2} \\ \frac{c_{2i_2} - g}{c_{2i_2} - b_{2i_2}}, & b_{2i_2} \leq g \leq \frac{c_{1i}b_{2i_2} - c_{2i_2}b_{1i}}{b_{2i_2} - c_{2i_2} - b_{1i} + c_{1i}} \\ \frac{c_{2i_2} - g}{c_{2i_2} - b_{2i_2}}, & \frac{c_{1i}b_{2i_2} - c_{2i_2}b_{1i}}{b_{2i_2} - c_{2i_2} - b_{1i} + c_{1i}} \leq g \leq c_{1i} \end{cases} \quad (4-38)$$

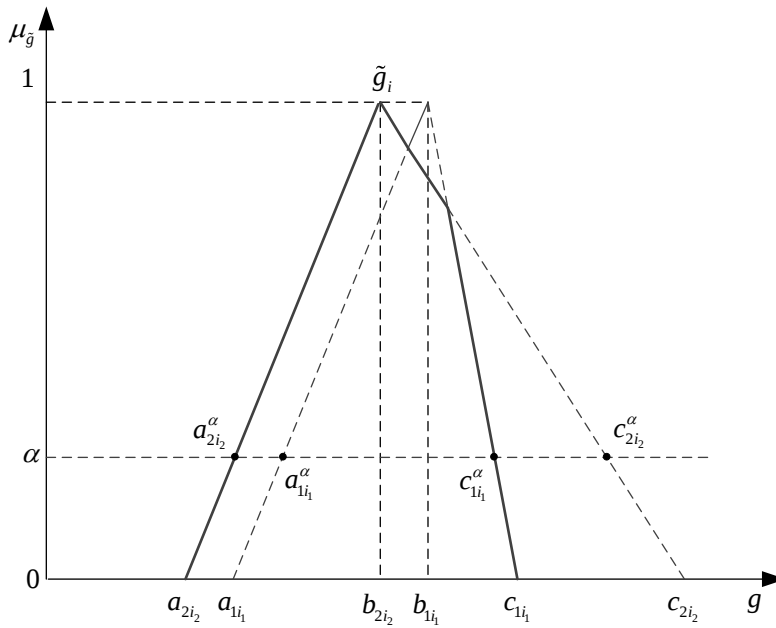
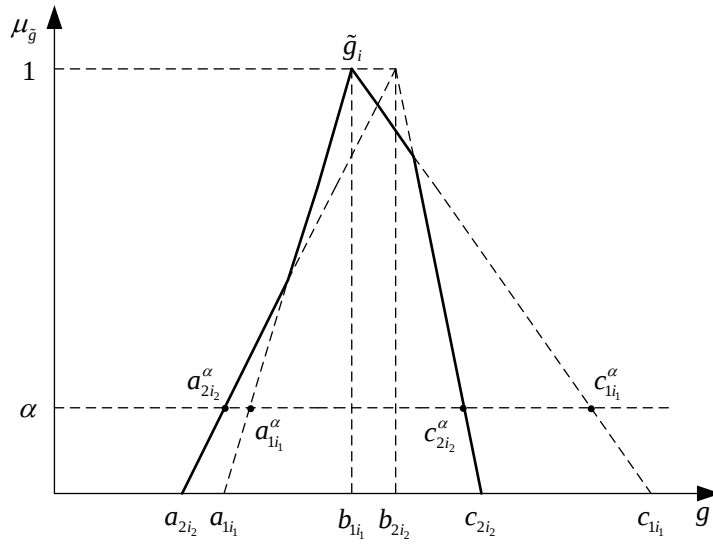


图 4-7 情形 6 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数

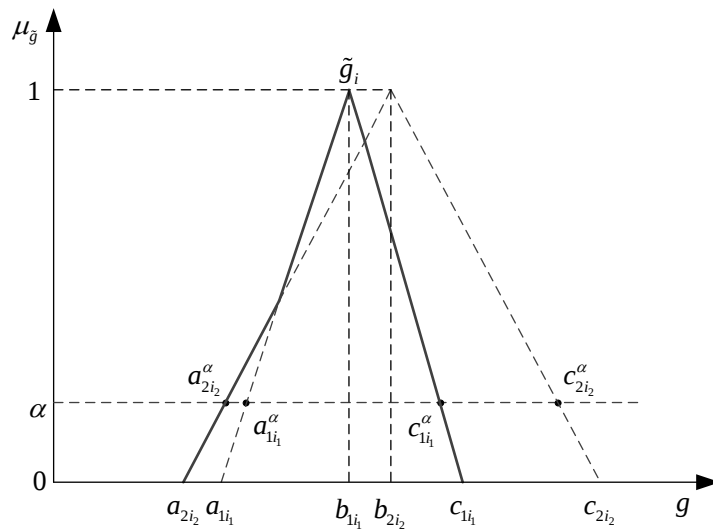
情形 7: $a_{1i} \geq a_{2i_2}$, $b_{1i} \leq b_{2i_2}$ 且 $c_{1i} \geq c_{2i_2}$ 。如图 4-8 所示, $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数为:

$$\mu_{\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i}, \tilde{g}_{2i_2})}(g) = \begin{cases} \frac{g - a_{2i_2}}{b_{2i_2} - a_{2i_2}}, & a_{2i_2} \leq g \leq \frac{a_{2i_2}b_{1i} - a_{1i}b_{2i_2}}{b_{1i} - b_{2i_2} - a_{1i} + a_{2i_2}} \\ \frac{g - a_{1i}}{b_{1i} - a_{1i}}, & \frac{a_{2i_2}b_{1i} - a_{1i}b_{2i_2}}{b_{1i} - b_{2i_2} - a_{1i} + a_{2i_2}} \leq g \leq b_{1i} \\ \frac{c_{1i} - g}{c_{1i} - b_{1i}}, & b_{1i} \leq g \leq \frac{c_{1i}b_{2i_2} - c_{2i_2}b_{1i}}{b_{2i_2} - c_{2i_2} - b_{1i} + c_{1i}} \\ \frac{c_{2i_2} - g}{c_{2i_2} - b_{2i_2}}, & \frac{c_{1i}b_{2i_2} - c_{2i_2}b_{1i}}{b_{2i_2} - c_{2i_2} - b_{1i} + c_{1i}} \leq g \leq c_{2i_2} \end{cases} \quad (4-39)$$


 图 4-8 情形 7 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数

情形 8: $a_{1i_1} \geq a_{2i_2}$, $b_{1i_1} \leq b_{2i_2}$ 且 $c_{1i_1} \leq c_{2i_2}$ 。如图 4-9 所示, $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数为:

$$\mu_{\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})}(g) = \begin{cases} \frac{g - a_{2i_2}}{b_{2i_2} - a_{2i_2}}, & a_{2i_2} \leq g \leq \frac{a_{2i_2}b_{1i_1} - a_{1i_1}b_{2i_2}}{b_{1i_1} - b_{2i_2} - a_{1i_1} + a_{2i_2}} \\ \frac{g - a_{1i_1}}{b_{1i_1} - a_{1i_1}}, & \frac{a_{2i_2}b_{1i_1} - a_{1i_1}b_{2i_2}}{b_{1i_1} - b_{2i_2} - a_{1i_1} + a_{2i_2}} \leq g \leq b_{1i_1} \\ \frac{c_{1i_1} - g}{c_{1i_1} - b_{1i_1}}, & b_{1i_1} \leq g \leq c_{1i_1} \end{cases} \quad (4-40)$$


 图 4-9 情形 8 下 $\tilde{\Omega}_s(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2})$ 的隶属函数

4.3.3.2 并联模糊复合算子

对于并联系统，系统的性能水平等于所有元件性能水平之和。根据三角模糊数的算术运算规则，有：

$$\begin{aligned}\tilde{g}_i &= \tilde{\Omega}_p \left(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2}, \dots, \tilde{g}_{ji_j}, \dots, \tilde{g}_{ni_n} \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ji_j}, \sum_{j=1}^n b_{ji_j}, \sum_{j=1}^n c_{ji_j} \right)\end{aligned}\quad (4-41)$$

式中， $\tilde{\Omega}_p$ 为并联模糊复合算子，三角模糊数 $(a_{ji_j}, b_{ji_j}, c_{ji_j})$ 为状态 i 下元件 j 的性能水平。

对应概率 $\tilde{p}_i$ 可表示为：

$$\tilde{p}_i = \left(\prod_{j=1}^n a_{ji_j}^p, \prod_{j=1}^n b_{ji_j}^p, \prod_{j=1}^n c_{ji_j}^p \right) \quad (4-42)$$

式中，三角模糊数 $(a_{ji_j}^p, b_{ji_j}^p, c_{ji_j}^p)$ 表示状态 i 下元件 j 处于相应性能水平的概率。

若系统为串并联混合系统，则通常将整个系统划分为不同的子系统。当串联子系统数或并联子系统中元件个数大于 2 时，则通过以下三个步骤进行简化：

步骤 1：计算串联或并联子系统中两个元件的 FUGF。

步骤 2：将步骤 1 中的两个元件视为一个新元件，并用新元件代替这两个元件。

步骤 3：通过步骤 2 的替换，若串联或并联子系统中的元件个数仍大于 2，则返回步骤 1，重复以上步骤直至最初的混联系统只包含一个元件。

通过以上三个步骤，可将任意混联系统转化为单一元件系统，但对于元件数较多的系统，所需要的计算量较大。为简化计算流程，在串联系统中可采用如下近似算法：

$$\begin{aligned}\tilde{g}_i &= \tilde{\Omega}_s \left(\tilde{g}_{1i_1}, \tilde{g}_{2i_2} \right) \\ &= \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot [a_i^{\alpha}, c_i^{\alpha}] \\ &= \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot \left[\min(a_{1i_1}^{\alpha}, a_{2i_2}^{\alpha}), \min(c_{1i_1}^{\alpha}, c_{2i_2}^{\alpha}) \right] \\ &= \left(\min(a_{1i_1}, a_{2i_2}), \min(b_{1i_1}, b_{2i_2}), \min(c_{1i_1}, c_{2i_2}) \right)\end{aligned}\quad (4-43)$$

至此，串联系统、并联系统以及串并联混合系统的模糊复合算子可得以定义，结合 4.3.1 小节提出的模型和式(4-27)、(4-30)-(4-32)，则可考虑多态系统可靠性评估过程中数据的模糊性以及主元件与从属元件间的相关性，为多态系统可靠性的综合评估提供更为全面的思路和方向。

4.4 算例分析

为验证本章所提方法，即考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法的工程适用性，本小节将针对两个实例，即核电站供能系统和矿用挖掘机推压机构液压子系统，分析系统可靠性评估中的数据模糊性，根据实际情况鉴别系统主元件以及主元件和其它元件间的关系，并应用本章所提方法进行模糊可靠性建模和分析，探讨该方法在实际工程应用中的可行性和准确性。

4.4.1 核电站供能系统模糊可靠性分析

核电站的工作原理是核燃料在“反应堆”设备内发生裂变产生大量热能，利用高压条件下的水将热能带出，并在蒸汽发生器内将热水变为蒸汽，从而推动汽轮机带着发电机一起旋转，最终输出电能。已知某小型核电站 G 给某学校供能，如图 4-10 所示，该核电站包括两个子系统，即供电子系统 G_1 和供热子系统 G_2 。核电站蒸汽发生器内的一部分蒸汽用于供电子系统发电，另外一部分用于供热子系统供热，且该核电站以供电为主。其中，供电子系统按照不同需求可分为三种不同的工作状态：满负荷运行、部分负荷运行以及停机检修。要求该核电站供能功率为不低于 26MW 左右的可靠度为 0.75。由于该核电站以供电为主，因此，供热子系统的性能水平受供电子系统的性能水平控制，这样，供电子系统 G_1 即为核电站系统的主元件，而供热子系统 G_2 则为从属元件。

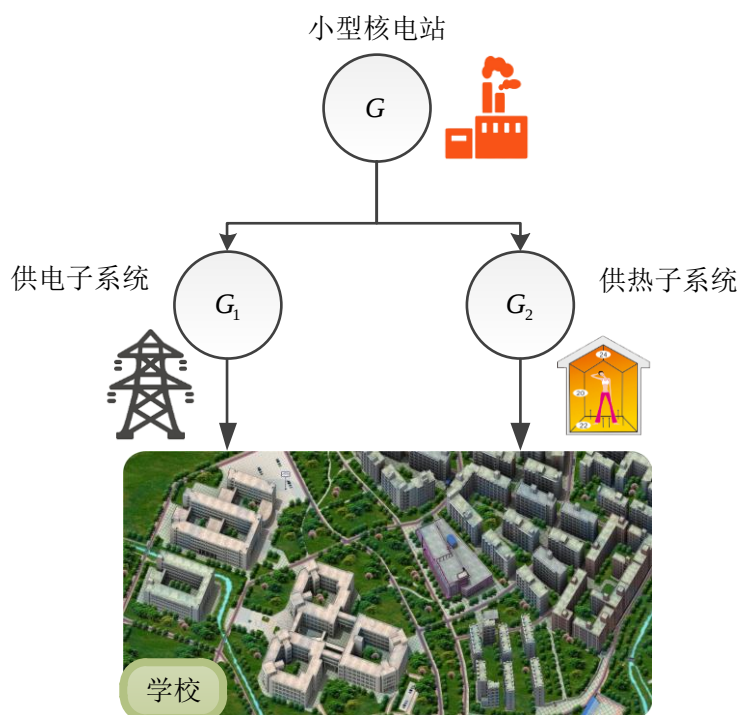


图 4-10 某小型核电站供能示意图

已知供电子系统性能水平的概率分布为：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_1 &= \{\tilde{g}_1^1, \tilde{g}_1^2, \tilde{g}_1^3\} = \{50, 20, 0\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}_1 &= \{\tilde{p}_1^1, \tilde{p}_1^2, \tilde{p}_1^3\} \\ &= \{(0.695, 0.7, 0.705), (0.09, 0.1, 0.105), (0.195, 0.2, 0.21)\}.\end{aligned}\quad (4-44)$$

式中， $\tilde{g}_1^1 \sim \tilde{g}_1^3$ 为供电子系统不同状态下的性能水平， $\tilde{p}_1^1 \sim \tilde{p}_1^3$ 为对应的概率。

已知状态 1、状态 2、状态 3 下，供热子系统性能水平的条件概率分布分别为：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_{2|1} &= \{\tilde{g}_{2|1}^1, \tilde{g}_{2|1}^2, \tilde{g}_{2|1}^3\} = \{20, 15, 5\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}_{2|1} &= \{\tilde{p}_{2|1}^1, \tilde{p}_{2|1}^2, \tilde{p}_{2|1}^3\} = \{0.6, (0.18, 0.2, 0.205), 0.2\}.\end{aligned}\quad (4-45)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_{2|2} &= \{\tilde{g}_{2|2}^1, \tilde{g}_{2|2}^2, \tilde{g}_{2|2}^3\} = \{15, 10, 6\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}_{2|2} &= \{\tilde{p}_{2|2}^1, \tilde{p}_{2|2}^2, \tilde{p}_{2|2}^3\} = \{0.7, 0.2, 0.1\}.\end{aligned}\quad (4-46)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_{2|3} &= \tilde{g}_{2|3}^1 = 0; \\ \tilde{\mathbf{p}}_{2|3} &= \tilde{p}_{2|3}^1 = 1.\end{aligned}\quad (4-47)$$

式中， $\tilde{g}_{2|1}^1 \sim \tilde{g}_{2|1}^3$ 为状态 1 下，供热子系统的性能水平， $\tilde{p}_{2|1}^1 \sim \tilde{p}_{2|1}^3$ 为对应的概率； $\tilde{g}_{2|2}^1 \sim \tilde{g}_{2|2}^3$ 为状态 2 下，供热子系统的性能水平， $\tilde{p}_{2|2}^1 \sim \tilde{p}_{2|2}^3$ 为对应的概率； $\tilde{g}_{2|3}^1$ 为状态 3 下，供热子系统的性能水平， $\tilde{p}_{2|3}^1$ 为对应的概率。

根据式(4-21)-式(4-22)，可得供热子系统性能水平的条件概率分布为：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_2 &= \{\tilde{g}_2^1, \tilde{g}_2^2, \tilde{g}_2^3, \tilde{g}_2^4, \tilde{g}_2^5, \tilde{g}_2^6\} = \{20, 15, 10, 6, 5, 0\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}'_{2|1} &= \{\tilde{p}_{2|1}^1, \tilde{p}_{2|1}^2, \tilde{p}_{2|1}^3, \tilde{p}_{2|1}^4, \tilde{p}_{2|1}^5, \tilde{p}_{2|1}^6\} = \{0.6, (0.18, 0.2, 0.205), 0, 0, 0.2, 0\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}'_{2|2} &= \{\tilde{p}_{2|2}^1, \tilde{p}_{2|2}^2, \tilde{p}_{2|2}^3, \tilde{p}_{2|2}^4, \tilde{p}_{2|2}^5, \tilde{p}_{2|2}^6\} = \{0, 0.7, 0.2, 0.1, 0, 0\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}'_{2|3} &= \{\tilde{p}_{2|3}^1, \tilde{p}_{2|3}^2, \tilde{p}_{2|3}^3, \tilde{p}_{2|3}^4, \tilde{p}_{2|3}^5, \tilde{p}_{2|3}^6\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 1\}.\end{aligned}\quad (4-48)$$

式中， $\tilde{g}_2^1 \sim \tilde{g}_2^6$ 为供热子系统所有可能出现的性能水平， $\tilde{p}_{2|1}^1 \sim \tilde{p}_{2|1}^6$ 、 $\tilde{p}_{2|2}^1 \sim \tilde{p}_{2|2}^6$ 、 $\tilde{p}_{2|3}^1 \sim \tilde{p}_{2|3}^6$ 分别为状态 1、状态 2、状态 3 下，供热子系统对应各性能水平的概率。

根据式(4-21)、(4-24)和(4-48)可得：

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{p}}_2^1 &= \{\tilde{p}_{2|1}^1, \tilde{p}_{2|2}^1, \tilde{p}_{2|3}^1\} = \{0.6, 0, 0\}; \\
\tilde{\mathbf{p}}_2^2 &= \{\tilde{p}_{2|1}^2, \tilde{p}_{2|2}^2, \tilde{p}_{2|3}^2\} = \{(0.18, 0.2, 0.205), 0.7, 0\}; \\
\tilde{\mathbf{p}}_2^3 &= \{\tilde{p}_{2|1}^3, \tilde{p}_{2|2}^3, \tilde{p}_{2|3}^3\} = \{0, 0.2, 0\}; \tilde{\mathbf{p}}_2^4 = \{\tilde{p}_{2|1}^4, \tilde{p}_{2|2}^4, \tilde{p}_{2|3}^4\} = \{0, 0.1, 0\}; \\
\tilde{\mathbf{p}}_2^5 &= \{\tilde{p}_{2|1}^5, \tilde{p}_{2|2}^5, \tilde{p}_{2|3}^5\} = \{0.2, 0, 0\}; \tilde{\mathbf{p}}_2^6 = \{\tilde{p}_{2|1}^6, \tilde{p}_{2|2}^6, \tilde{p}_{2|3}^6\} = \{0, 0, 1\}.
\end{aligned} \tag{4-49}$$

式中, $\tilde{p}_{2|h}^h, \tilde{p}_{2|2}^h, \tilde{p}_{2|3}^h (h=1, 2, \dots, 6)$ 分别为供热子系统在状态 1、状态 2、状态 3 下性能水平取 $\tilde{g}_2^h$ 的概率。

根据式(4-23), 供电电子系统和供热子系统的 u -函数分别为:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1(z) &= \tilde{p}_1^1 z^{\tilde{g}_1^1} + \tilde{p}_1^2 z^{\tilde{g}_1^2} + \tilde{p}_1^3 z^{\tilde{g}_1^3} \\
&= (0.695, 0.7, 0.705) z^{50} + (0.09, 0.1, 0.105) z^{20} + (0.195, 0.2, 0.21) z^0
\end{aligned} \tag{4-50}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_2(z) &= \sum_{h=1}^6 \tilde{\mathbf{p}}_2^h z^{\tilde{g}_2^h} \\
&= \{0.6, 0, 0\} z^{20} + \{(0.18, 0.2, 0.205), 0.7, 0\} z^{15} + \{0, 0.2, 0\} z^{10} \\
&\quad + \{0, 0.1, 0\} z^6 + \{0.2, 0, 0\} z^5 + \{0, 0, 1\} z^0
\end{aligned} \tag{4-51}$$

由于要求的性能水平为总功率, 则系统输出性能为两个子系统性能水平之和, 系统可视为并联系统。

根据式(4-41)和(4-42), 系统性能水平的 u -函数可表示为:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_p(z) &= \tilde{\Omega}_p(\tilde{u}_1(z), \tilde{u}_2(z)) \\
&= (0.417, 0.42, 0.423) z^{50+20} + (0.1251, 0.14, 0.144525) z^{50+15} + 0 z^{50+10} \\
&\quad + 0 z^{50+6} + (0.139, 0.14, 0.141) z^{50+5} + 0 z^{50+0} + 0 z^{20+20} \\
&\quad + (0.063, 0.07, 0.0735) z^{20+15} + (0.018, 0.02, 0.021) z^{20+10} \\
&\quad + (0.009, 0.01, 0.0105) z^{20+6} + 0 z^{20+5} + 0 z^{20+0} + 0 z^{0+20} + 0 z^{0+15} \\
&\quad + 0 z^{0+10} + 0 z^{0+6} + 0 z^{0+5} + (0.195, 0.2, 0.21) z^{0+0} \\
&= (0.417, 0.42, 0.423) z^{70} + (0.1251, 0.14, 0.144525) z^{65} \\
&\quad + (0.139, 0.14, 0.141) z^{55} + (0.063, 0.07, 0.0735) z^{35} \\
&\quad + (0.018, 0.02, 0.021) z^{30} + (0.009, 0.01, 0.0105) z^{26} \\
&\quad + (0.195, 0.2, 0.21) z^0
\end{aligned} \tag{4-52}$$

由式(4-52)可知, 该热电机组具有 7 种性能水平。假设系统要求的输出功率可用三角模糊数 $\tilde{d} = (20, 26, 28)$ 来表示, 模糊集 $\tilde{\phi}_i^+ (i=1, 2, \dots, 7)$ 的相对势可通过以下步骤进行计算:

(1) 对于状态 $i=1, 2, 3, 4, 5$, 性能水平充裕, $\tilde{g}_i > \tilde{d}$, 则 $|\tilde{\phi}_i^+|_r = 1$;

(2) 对于状态 $i=7$ ，性能水平不足， $\tilde{g}_i < \tilde{d}$ ，则 $|\tilde{\phi}_i^+|_r = 0$ ；

(3) 对于状态 $i=6$ ， $\tilde{\phi}_i = 26 - (20, 26, 28) = (-2, 0, 6)$ ， $|\tilde{\phi}_i| = 1/2 \times [6 - (-2)] = 4$ ；
 $|\tilde{\phi}_i^+| = 1/2 \times (6 - 0) = 3$ ， $|\tilde{\phi}_i^+|_r = 3/4 = 0.75$ 。

根据式(4-32)则可得到模糊多态系统的模糊可靠度。

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \Omega_{\text{sys}}(\tilde{U}_s(z), \tilde{d}) = \sum_{i=1}^7 \tilde{p}_i z^{\tilde{g}_i} \\ &= (0.417, 0.42, 0.423) \times 1 + (0.1251, 0.14, 0.144525) \times 1 \\ &\quad + (0.139, 0.14, 0.141) \times 1 + (0.063, 0.07, 0.0735) \times 1 \\ &\quad + (0.018, 0.02, 0.021) \times 1 + (0.009, 0.01, 0.0105) \times 0.75 \\ &\quad + (0.195, 0.2, 0.21) \times 0 \\ &= (0.76885, 0.7975, 0.8109) \end{aligned} \quad (4-53)$$

由于要求核电站输出功率为不低于 26MW 左右的可靠度为 0.75，根据式(4-53)可知，该核电站的供能水平能够达到所要求的可靠度。

4.4.2 矿用挖掘机推压机构液压子系统模糊可靠性分析

矿用挖掘机液压系统包含多个子系统，而每个子系统又由基本回路和辅助回路构成。挖掘机在完成推压、提升、回转和卸料这一工作循环过程中，整个子系统的总压力受子系统油路上的总安全阀控制，各工作支路上的安全阀根据不同情况对应两种作用，即过载泄压保护和油压不足时的补油。矿用挖掘机的整个工作过程由多个挖掘循环组成，其运动包括启动、制动、回转、卸料等，再加上负载变化大，冲击和振动频繁，而且属于野外作业，地理位置和温度变化大，因此，矿用挖掘机的液压系统在服役过程中为典型的多态系统。已知矿用挖掘机推压动作的完成受三个元件（闸阀）组成的液压子系统控制，如图 4-11 所示。闸阀 3 为总安全阀，针对挖掘机不同的动作要求，对应两种不同的工作状态：完全开启（状态 1）和完全关闭（状态 2），闸阀 1 和闸阀 2 为支路安全阀，其性能水平及相应概率由闸阀 3 的状态决定，且要求推压机构液压子系统总安全阀输出油压不低于 45MPa 左右的可靠度为 0.9。因此，该矿用挖掘机推压机构液压子系统的主元件为闸阀 3，而闸阀 1 和闸阀 2 为从属元件。

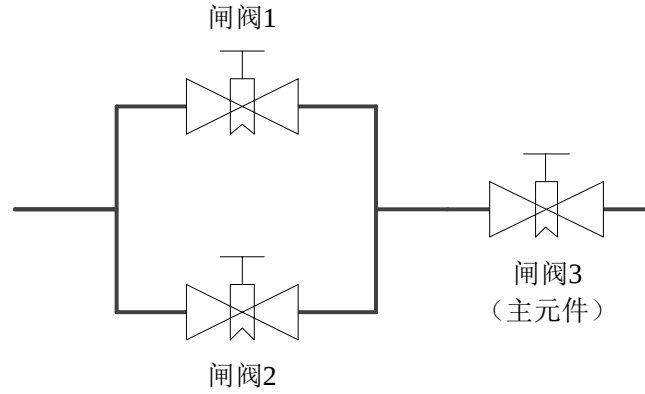


图 4-11 某矿用挖掘机推压机构液压子系统示意图

已知闸阀 3 性能水平的概率分布为：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_3 &= \{\tilde{g}_3^1, \tilde{g}_3^2\} = \{60, 0\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}_3 &= \{\tilde{p}_3^1, \tilde{p}_3^2\} = \{(0.65, 0.70, 0.90), (0.20, 0.30, 0.55)\}.\end{aligned}\quad (4-54)$$

式中， $\tilde{g}_3^1, \tilde{g}_3^2$ 为两种不同状态下闸阀 3 的性能水平， $\tilde{p}_3^1, \tilde{p}_3^2$ 为对应的概率。

已知闸阀 3 完全打开（状态 1）或完全关闭（状态 2）时，闸阀 1 性能水平的条件概率分布分别为：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_{1|3} &= \{\tilde{g}_{1|3}^1, \tilde{g}_{1|3}^2, \tilde{g}_{1|3}^3\} = \{20, (10, 15, 16), 0\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}_{1|3} &= \{\tilde{p}_{1|3}^1, \tilde{p}_{1|3}^2, \tilde{p}_{1|3}^3\} \\ &= \{(0.50, 0.60, 0.65), (0.15, 0.20, 0.25), (0.18, 0.20, 0.24)\}.\end{aligned}\quad (4-55)$$

和

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_{1|2} &= \{\tilde{g}_{1|2}^1, \tilde{g}_{1|2}^2, \tilde{g}_{1|2}^3\} = \{20, (10, 12, 13), 0\}; \\ \tilde{\mathbf{p}}_{1|2} &= \{\tilde{p}_{1|2}^1, \tilde{p}_{1|2}^2, \tilde{p}_{1|2}^3\} \\ &= \{(0.60, 0.70, 0.75), (0.15, 0.20, 0.30), (0.05, 0.10, 0.25)\}.\end{aligned}\quad (4-56)$$

式中， $\tilde{g}_{1|3}^1 \sim \tilde{g}_{1|3}^3$ 和 $\tilde{g}_{1|2}^1 \sim \tilde{g}_{1|2}^3$ 分别为两种不同状态下闸阀 1 的性能水平， $\tilde{p}_{1|3}^1 \sim \tilde{p}_{1|3}^3$ 和 $\tilde{p}_{1|2}^1 \sim \tilde{p}_{1|2}^3$ 为对应的概率。

已知闸阀 3 完全打开（状态 1）或完全关闭（状态 2）时，闸阀 2 性能水平的条件概率分布分别为：

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{g}}_{2|1} &= \{\tilde{g}_{2|1}^1, \tilde{g}_{2|1}^2, \tilde{g}_{2|1}^3\} = \{40, (26, 30, 32), 0\}; \\
 \tilde{\mathbf{p}}_{2|1} &= \{\tilde{p}_{2|1}^1, \tilde{p}_{2|1}^2, \tilde{p}_{2|1}^3\} \\
 &= \{(0.60, 0.70, 0.85), (0.08, 0.10, 0.15), (0.16, 0.20, 0.35)\}.
 \end{aligned} \tag{4-57}$$

和

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{g}}_{2|2} &= \{\tilde{g}_{2|2}^1, \tilde{g}_{2|2}^2, \tilde{g}_{2|2}^3\} = \{40, (26, 30, 32), 0\}; \\
 \tilde{\mathbf{p}}_{2|2} &= \{\tilde{p}_{2|2}^1, \tilde{p}_{2|2}^2, \tilde{p}_{2|2}^3\} \\
 &= \{(0.50, 0.70, 0.80), (0.05, 0.10, 0.12), (0.10, 0.20, 0.25)\}.
 \end{aligned} \tag{4-58}$$

式中, $\tilde{g}_{2|1}^1 \sim \tilde{g}_{2|1}^3$ 和 $\tilde{g}_{2|2}^1 \sim \tilde{g}_{2|2}^3$ 分别为两种不同状态下闸阀 2 的性能水平, $\tilde{p}_{2|1}^1 \sim \tilde{p}_{2|1}^3$ 和 $\tilde{p}_{2|2}^1 \sim \tilde{p}_{2|2}^3$ 为对应的概率。

由式(4-21)-(4-22)和式(4-55)-(4-56), 闸阀 1 的条件概率分布为:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{g}}_1 &= \{\tilde{g}_1^1, \tilde{g}_1^2, \tilde{g}_1^3, \tilde{g}_1^4\} = \{20, (10, 15, 16), (10, 12, 13), 0\}; \\
 \tilde{\mathbf{p}}'_{1|1} &= \{\tilde{p}_{1|1}^1, \tilde{p}_{1|1}^2, \tilde{p}_{1|1}^3, \tilde{p}_{1|1}^4\} \\
 &= \{(0.50, 0.60, 0.65), (0.15, 0.20, 0.25), 0, (0.18, 0.20, 0.24)\}; \\
 \tilde{\mathbf{p}}'_{1|2} &= \{\tilde{p}_{1|2}^1, \tilde{p}_{1|2}^2, \tilde{p}_{1|2}^3, \tilde{p}_{1|2}^4\} \\
 &= \{(0.60, 0.70, 0.75), 0, (0.15, 0.20, 0.30), (0.05, 0.10, 0.25)\}.
 \end{aligned} \tag{4-59}$$

式中, $\tilde{g}_1^1 \sim \tilde{g}_1^4$ 为闸阀 1 所有可能出现的性能水平, $\tilde{p}_{1|1}^1 \sim \tilde{p}_{1|1}^4$ 、 $\tilde{p}_{1|2}^1 \sim \tilde{p}_{1|2}^4$ 分别为状态 1、状态 2 下, 闸阀 1 对应各性能水平的概率。

根据式(4-21)、(4-24)和(4-59)可得:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{p}}_1^1 &= \{\tilde{p}_{1|1}^1, \tilde{p}_{1|2}^1\} = \{(0.50, 0.60, 0.65), (0.60, 0.70, 0.75)\}; \\
 \tilde{\mathbf{p}}_1^2 &= \{\tilde{p}_{1|1}^2, \tilde{p}_{1|2}^2\} = \{(0.15, 0.20, 0.25), 0\}; \\
 \tilde{\mathbf{p}}_1^3 &= \{\tilde{p}_{1|1}^3, \tilde{p}_{1|2}^3\} = \{0, (0.15, 0.20, 0.30)\}; \\
 \tilde{\mathbf{p}}_1^4 &= \{\tilde{p}_{1|1}^4, \tilde{p}_{1|2}^4\} = \{(0.18, 0.20, 0.24), (0.05, 0.10, 0.25)\}.
 \end{aligned} \tag{4-60}$$

式中, $\tilde{p}_{1|1}^h, \tilde{p}_{1|2}^h, (h=1, 2, 3, 4)$ 分别为闸阀 1 在状态 1、状态 2 下性能水平取 $\tilde{g}_1^h$ 的概率。

由式(4-21)-(4-22)和式(4-57)-(4-58), 闸阀 2 的条件概率分布为:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{g}}_2 &= \{\tilde{g}_2^1, \tilde{g}_2^2, \tilde{g}_2^3\} = \{40, (26, 30, 32), 0\}; \\
\tilde{\mathbf{p}}'_{2|1} &= \{\tilde{p}_{2|1}^1, \tilde{p}_{2|1}^2, \tilde{p}_{2|1}^3\} \\
&= \{(0.60, 0.70, 0.85), (0.08, 0.10, 0.15), (0.16, 0.20, 0.35)\}; \\
\tilde{\mathbf{p}}'_{2|2} &= \{\tilde{p}_{2|2}^1, \tilde{p}_{2|2}^2, \tilde{p}_{2|2}^3\} \\
&= \{(0.50, 0.70, 0.80), (0.05, 0.10, 0.12), (0.10, 0.20, 0.25)\}.
\end{aligned} \tag{4-61}$$

式中, $\tilde{g}_2^1 \sim \tilde{g}_2^3$ 为闸阀 2 所有可能出现的性能水平, $\tilde{p}_{2|1}^1 \sim \tilde{p}_{2|1}^3$ 、 $\tilde{p}_{2|2}^1 \sim \tilde{p}_{2|2}^3$ 分别为状态 1、状态 2 下, 闸阀 2 对应各性能水平的概率。

根据式(4-21)、(4-24)和(4-61), 可得:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{p}}_2^1 &= \{\tilde{p}_{2|1}^1, \tilde{p}_{2|2}^1\} = \{(0.60, 0.70, 0.85), (0.50, 0.70, 0.80)\}; \\
\tilde{\mathbf{p}}_2^2 &= \{\tilde{p}_{2|1}^2, \tilde{p}_{2|2}^2\} = \{(0.08, 0.10, 0.15), (0.05, 0.10, 0.12)\}; \\
\tilde{\mathbf{p}}_2^3 &= \{\tilde{p}_{2|1}^3, \tilde{p}_{2|2}^3\} = \{(0.16, 0.20, 0.35), (0.10, 0.20, 0.25)\}.
\end{aligned} \tag{4-62}$$

式中, $\tilde{p}_{2|1}^h, \tilde{p}_{2|2}^h, (h=1, 2, 3)$ 分别为闸阀 2 在状态 1、状态 2 下性能水平取 $\tilde{g}_2^h$ 的概率。

根据式(4-23), 各闸阀性能水平的 u -函数分别为:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_3(z) &= \tilde{p}_3^1 \cdot z^{\tilde{g}_3^1} + \tilde{p}_3^2 \cdot z^{\tilde{g}_3^2} \\
&= (0.65, 0.70, 0.90)z^{60} + (0.20, 0.30, 0.55)z^0
\end{aligned} \tag{4-63}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1(z) &= \sum_{h=1}^4 \tilde{\mathbf{p}}_1^h z^{\tilde{g}_1^h} \\
&= \{(0.50, 0.60, 0.65), (0.60, 0.70, 0.75)\} z^{20} \\
&\quad + \{(0.15, 0.20, 0.25), 0\} z^{(10, 15, 16)} \\
&\quad + \{0, (0.15, 0.20, 0.30)\} z^{(10, 12, 13)} \\
&\quad + \{(0.18, 0.20, 0.24), (0.05, 0.10, 0.25)\} z^0
\end{aligned} \tag{4-64}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_2(z) &= \sum_{h=1}^3 \tilde{\mathbf{p}}_2^h z^{\tilde{g}_2^h} \\
&= \{(0.60, 0.70, 0.85), (0.50, 0.70, 0.80)\} z^{40} \\
&\quad + \{(0.08, 0.10, 0.15), (0.05, 0.10, 0.12)\} z^{(26, 30, 32)} \\
&\quad + \{(0.16, 0.20, 0.35), (0.10, 0.20, 0.25)\} z^0
\end{aligned} \tag{4-65}$$

根据图 4-11, 该液压子系统可视为闸阀 1 和闸阀 2 并联之后再与闸阀 3 串联的系统, 因此, 此系统为串并混合系统。并联子系统和整个液压子系统的性能水平的 u -函数可表示为:

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_p(z) &= \tilde{\Omega}_p(\tilde{u}_1(z), \tilde{u}_2(z)) \\
 &= \{(0.30, 0.42, 0.5525), (0.30, 0.49, 0.60)\} z^{60} \\
 &\quad + \{(0.04, 0.06, 0.0975), (0.03, 0.07, 0.09)\} z^{(46,50,52)} \\
 &\quad + \{(0.08, 0.12, 0.2275), (0.06, 0.14, 0.1875)\} z^{20} \\
 &\quad + \{(0.09, 0.14, 0.2125), 0\} z^{(50,55,56)} \\
 &\quad + \{(0.012, 0.02, 0.0375), 0\} z^{(36,45,48)} \\
 &\quad + \{(0.024, 0.04, 0.0875), 0\} z^{(10,15,16)} \\
 &\quad + \{0, (0.075, 0.14, 0.24)\} z^{(50,52,53)} \\
 &\quad + \{0, (0.0075, 0.02, 0.036)\} z^{(36,42,45)} \\
 &\quad + \{0, (0.015, 0.04, 0.075)\} z^{(10,12,13)} \\
 &\quad + \{(0.108, 0.14, 0.204), (0.025, 0.07, 0.2)\} z^{40} \\
 &\quad + \{(0.0144, 0.02, 0.036), (0.0025, 0.01, 0.03)\} z^{(26,30,32)} \\
 &\quad + \{(0.0288, 0.04, 0.084), (0.005, 0.02, 0.0625)\} z^0
 \end{aligned} \tag{4-66}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_s(z) &= \tilde{\Omega}_s(\tilde{\Omega}_p(\tilde{u}_1(z), \tilde{u}_2(z)), \tilde{u}_3(z)) \\
 &= (0.195, 0.294, 0.49725) z^{\min\{60,60\}} + (0.026, 0.042, 0.08775) z^{\min\{60,(46,50,52)\}} \\
 &\quad + (0.052, 0.084, 0.20475) z^{\min\{60,20\}} + (0.0585, 0.098, 0.19125) z^{\min\{60,(50,55,56)\}} \\
 &\quad + (0.0078, 0.014, 0.03375) z^{\min\{60,(36,45,48)\}} + (0.0156, 0.028, 0.07875) z^{\min\{60,(10,15,16)\}} \\
 &\quad + (0.0702, 0.098, 0.1836) z^{\min\{60,40\}} + (0.00936, 0.014, 0.0324) z^{\min\{60,(26,30,32)\}} \\
 &\quad + (0.01872, 0.028, 0.0756) z^{\min\{60,0\}} + (0.06, 0.147, 0.33) z^{\min\{0,0\}} \\
 &\quad + (0.006, 0.021, 0.0495) z^{\min\{0,0\}} + (0.012, 0.042, 0.103125) z^{\min\{0,0\}} \\
 &\quad + (0.015, 0.042, 0.132) z^{\min\{0,0\}} + (0.0015, 0.006, 0.0198) z^{\min\{0,0\}} \\
 &\quad + (0.003, 0.012, 0.04125) z^{\min\{0,0\}} + (0.005, 0.021, 0.11) z^{\min\{0,0\}} \\
 &\quad + (0.0005, 0.003, 0.0165) z^{\min\{0,0\}} + (0.001, 0.006, 0.034375) z^{\min\{0,0\}} \\
 &= (0.195, 0.294, 0.49725) z^{60} + (0.0585, 0.098, 0.19125) z^{(50,55,56)} \\
 &\quad + (0.026, 0.042, 0.08775) z^{(46,50,52)} + (0.0078, 0.014, 0.03375) z^{(36,45,48)} \\
 &\quad + (0.0702, 0.098, 0.1836) z^{40} + (0.00936, 0.014, 0.0324) z^{(26,30,32)} \\
 &\quad + (0.052, 0.084, 0.20475) z^{20} + (0.0156, 0.028, 0.07875) z^{(10,15,16)} \\
 &\quad + (0.12272, 0.328, 0.91215) z^0
 \end{aligned} \tag{4-67}$$

由式(4-67)可知，该液压系统具有 9 个不同的状态。假设系统要求可用三角模

糊数表示为 $\tilde{d} = (43, 45, 46)$ ，则模糊集 $\tilde{\phi}_i^+, i=1, 2, \dots, 9$ 的相对势可通过以下步骤进行评估：

- a) 对于状态 $i=1, 2, 3$ ，性能水平必然 $\tilde{g}_i > \tilde{d}$ ，则 $|\tilde{\phi}_i^+|_r = 1$ ；
- b) 对于状态 $i=5, 6, 7, 8, 9$ ，性能水平必然 $\tilde{g}_i < \tilde{d}$ ，则 $|\tilde{\phi}_i^+|_r = 0$ ；
- c) 对于状态 $i=4$ ， $\tilde{\phi}_i = (36, 45, 48) - (43, 45, 46) = (-10, 0, 5)$ ，
 $|\tilde{\phi}_i| = 1/2 \times [5 - (-10)] = 7.5$ ； $|\tilde{\phi}_i^+| = 1/2 \times [5 - 0] = 2.5$ ， $|\tilde{\phi}_i^+|_r = 2.5 / 7.5 = 0.3333$ 。

根据式(4-32)则可得模糊多态系统的模糊可靠度为：

$$\begin{aligned}
 \tilde{R} &= \Omega_{\text{sys}}(\tilde{U}_s(z), \tilde{d}) = \sum_{i=1}^9 \tilde{p}_i z^{\tilde{g}_i} \\
 &= (0.195, 0.294, 0.49725) + (0.0585, 0.098, 0.19125) \\
 &\quad + (0.026, 0.042, 0.08775) + (0.0078, 0.014, 0.03375) \times 0.3333 \quad (4-68) \\
 &\quad + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\
 &= (0.2821, 0.4387, 0.7875)
 \end{aligned}$$

由于推压机构液压子系统的要求为总安全阀输出油压不低于 45MPa 左右的可靠度为 0.9，根据以上分析可知，该矿用挖掘机推压机构液压子系统无法达到所要求的性能水平。

4.5 本章小结

本章首先对多态系统和模糊通用生成函数进行简要介绍，随后基于模糊通用生成函数，提出一种考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析新方法。该方法能考虑元件或子系统间的主从关系，是对基于模糊通用生成函数的可靠性评估方法的延伸与扩展。同时，本章给出了计算模糊可靠度的详细流程。此外，为了计算模糊多态系统的模糊性能分布，并对其进行可靠性评估，本章还分别对串联和并联模糊复合算子进行了定义。最后，分别对某小型核电站供能系统和某挖掘机提升机构液压子系统进行了系统模糊可靠性分析以验证本文所提方法的可行性。需要指出的是，本章假设主元件与其它非主元件是主从关系，为单向关联的，即非主元件的性能水平取决于主元件的性能水平。同时，本章中将系统的性能水平和对应概率视为模糊变量，今后将重点研究性能水平和对应概率为模糊随机过程，以及不同元件或子系统间关系更为复杂时的多态系统模糊可靠性评估方法。

第五章 模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计

在实际结构系统的可靠性设计优化中,常常存在多种变量混合的情况,只包含单一类型随机变量的情形较少。在传统的可靠性设计中,常采用随机变量表征不确定性,且这些随机变量可通过确定的概率分布进行描述。然而,工程实际中,多数随机变量的概率分布较难甚至无法获取,或者所获取的概率分布可能不准确,而仅能用模糊值或区间进行粗略描述。为此,本章将讨论模糊变量和区间变量混合下的系统可靠性设计优化方法。首先建立模糊变量和区间变量混合下结构的可靠性优化设计模型;其次基于熵值不变转化方法和序列优化方法进行可靠性分析和优化求解;最后用具体实例验证所提方法的性能。

5.1 引言

通常,某些关键系统出现失效可能导致灾难性的后果,如航天飞船机械系统故障、核电站的核泄漏等。因此,可靠性或风险评估是设计阶段需重点考虑的问题之一。基于可靠性的优化设计是一种概率设计方法,已成功应用在土木工程、机械工程以及航空航天等领域^[186]。可靠性优化设计的主要目的是在设计阶段考虑可靠性约束要求,以保证所设计的产品达到期望可靠度下的性能最优。科技的发展和社会的进步对产品的可靠性和在恶劣环境下的适用性提出了更高要求,加之结构复杂度的增加,传统的可靠性设计方法已难以适用。如航天飞船、核电站、高速列车等,这些系统的可靠性设计通常涉及相互交叉影响的多个学科、多种类型的设计变量和多源不确定信息的融合等问题。因此,可靠性设计在工程应用中往往面临两大困难:其一,需要大量的计算。其二,系统中某些设计参数或设计变量的概率特征无法准确获得。

工程实际设计中,模糊变量和区间变量共存的情形大量存在,因此,本章将致力于解决区间变量和模糊变量混合下的可靠性优化设计问题,重点研究基于区间变量最坏情况的可靠性分析方法和基于等价转换的最优化设计方法。首先基于熵值不变,将模糊变量向正态空间内的随机变量进行转化,从而探讨解决随机变量和区间变量混合的优化策略,并提出基于区间变量最坏情况的可靠性分析方法。该方法先在可靠性分析过程中确定最坏情况下的区间变量组合,再进行优化设计,因此,该方法是一个双环的计算过程,计算量较大。为减轻计算量,通过序列优化方法将双环解耦,并用一系列连续的单环代替计算量大且复杂的双环过程。

5.2 可靠性分析与优化设计

可靠性反映了产品在规定条件下和规定时间内,完成规定功能的能力。若用概率来衡量这一能力大小,则称为可靠度,通常用 R 来表示。若可靠性分析中只存在随机变量向量 $\mathbf{X}$, 则可靠度可以表示为:

$$R = \Pr\{g(\mathbf{X}) \geq 0\} \quad (5-1)$$

式中, $\Pr\{\cdot\}$ 表示概率, $g(\mathbf{X})$ 为极限状态函数。如果随机变量向量 $\mathbf{X}$ 中的随机变量互相独立, 且联合概率密度函数可以表示为 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, 则可靠度计算式为:

$$R = \Pr\{g(\mathbf{X}) \geq 0\} = \int_{g(\mathbf{X}) \geq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5-2)$$

在实际应用中, 极限状态函数 $g(\mathbf{X})$ 通常为非线性函数, 且积分区域为非线性, 加上随机变量的维数较多, 因此难以通过多重积分来直接计算可靠度。式(5-2)中的可靠度, 通常可用近似方法加以计算, 最常见的有一阶可靠度方法 (First Order Reliability Method, FORM)^[187] 和二阶可靠度方法 (Second Order Reliability Method, SORM)^[188-190]。两者的基本思想均为简化概率密度函数 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, 同时, 将极限状态函数 $g(\mathbf{X})$ 进行近似, 从而使积分变得易于求解。二者的根本区别在于对极限状态函数进行展开的阶数不同, FORM 将极限状态函数在设计验算点 (Most Probable Point, MPP) 处进行一阶泰勒公式近似展开, 而 SORM 是把极限状态函数在 MPP 处进行二阶泰勒公式近似展开。因此, SORM 比 FORM 的计算精度高, 但是计算效率却相对较低。

在使用 FORM 或 SORM 求解可靠度时, 通常分为三个步骤:

步骤一: 简化被积函数。

包含随机变量向量 $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的空间称为 $\mathbf{X}$ -空间, 如图 5-1 所示 (假设 $\mathbf{x}$ 为二维随机变量向量), 通过 Rosenblatt 变换, 原始 $\mathbf{X}$ -空间可以转化为图 5-2 所示的标准正态空间, 称为 $\mathbf{U}$ -空间。转换后的随机变量均服从标准正态分布, 具体转换过程如下^[191]:

$$u_i = \Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i)\right] \quad (5-3)$$

式中, $\Phi^{-1}(\cdot)$ 表示标准正态累积分布函数的反函数, $F_{X_i}(x_i)$ 为随机变量 X_i 的累积分布函数, 转换完成后的可靠度计算公式变为:

$$R = \Pr\{g(\mathbf{X}) \geq 0\} = \int_{g(\mathbf{U}) \geq 0} f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int \int \dots \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2}\right) \right] du_1 du_2 \dots du_n \quad (5-4)$$

式中, $f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})$ 为 $\mathbf{U}$ 的联合概率密度函数。

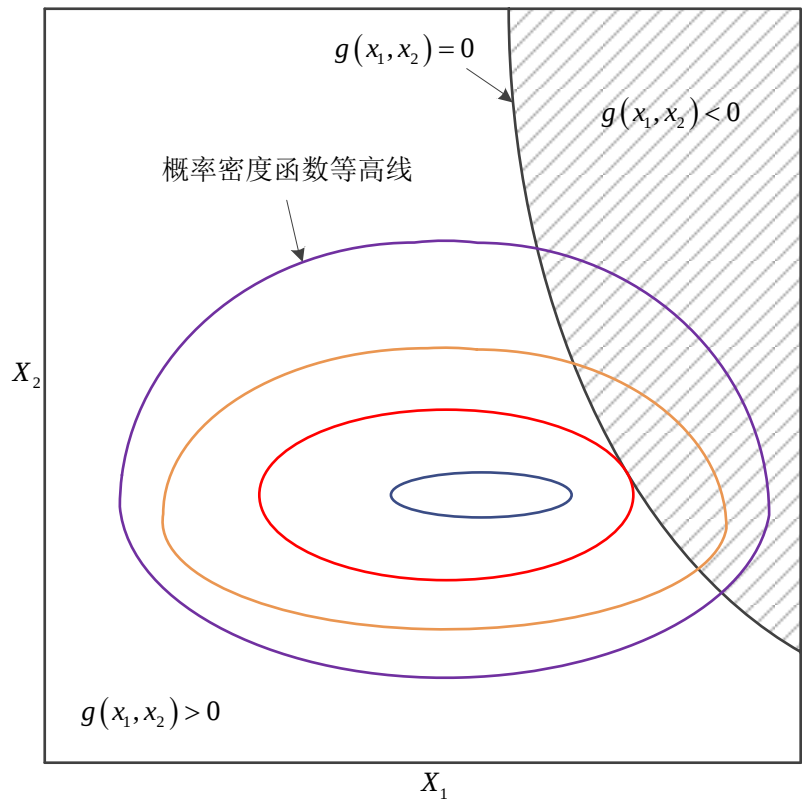


图 5-1 原始 $\mathbf{X}$ -空间

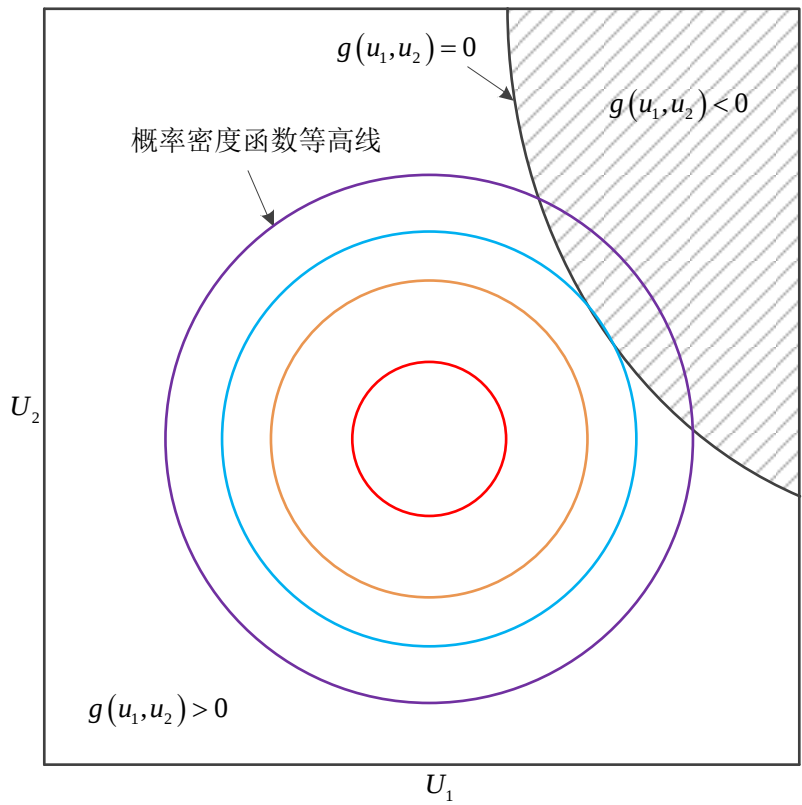


图 5-2 标准正态 $\mathbf{U}$ -空间

步骤二：搜寻 $\mathbf{U}$ -空间的 MPP 点

为提高精度，所选择的展开点必须对概率积分具有最大贡献，这一展开点即为 MPP 点。如图 5-3 所示，MPP 点是 $\mathbf{U}$ -空间中极限状态方程 $g(\mathbf{U})=0$ 边界上概率密度函数取最大值的点，通常可采用可靠度指数法（Reliability Index Method, RIA）和性能测量法（Performance Measure Method, PMA）^[192-194]进行求解。

（1）可靠度指数法。根据 MPP 点的定义，MPP 点满足：

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{u}} \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2}\right) \right] \\ \text{s.t. } g(\mathbf{U}) = 0 \end{cases} \quad (5-5)$$

由于

$$\prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2}\right) \right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i^2\right) \quad (5-6)$$

式(5-5)可以改写为：

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\| \\ \text{s.t. } g(\mathbf{U}) = 0 \end{cases} \quad (5-7)$$

式中， $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$ 为向量 $\mathbf{u}$ 的长度。

由式(5-7)可知，MPP 点 $\mathbf{u}^*$ 为标准正态 $\mathbf{U}$ -空间中，极限状态方程 $g(\mathbf{U})=0$ 边界上距原点距离最短的点，通常，将最短距离 $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$ 称为可靠度指标或可靠性因数，可靠度近似计算为：

$$R = \Pr\{g(\mathbf{U}) \geq 0\} = \Phi(\beta) \quad (5-8)$$

式中， $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布累积函数。

（2）性能测量法。性能测量法是计算给定可靠度下极限状态方程的值^[195]，属于可靠性逆问题^[147, 154, 196-197]，其步骤如下：

首先，计算对应给定可靠度 R 的 MPP 点 $\mathbf{u}_{MPP}^R$ ， $\mathbf{u}_{MPP}^R$ 可以通过求解以下最小化问题得到^[198-199]：

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}} g(\mathbf{u}) \\ \text{s.t. } \|\mathbf{u}\| = \Phi^{-1}(R) \end{cases} \quad (5-9)$$

然后，计算 $\mathbf{u}_{MPP}^R$ 处性能函数 $g(\mathbf{u})$ 的值 Z^R 。

$$Z^R = g(\mathbf{u}_{MPP}^R) \quad (5-10)$$

式中, $\mathbf{u}_{MPP}^R$ 为式(5-9)的最优解。

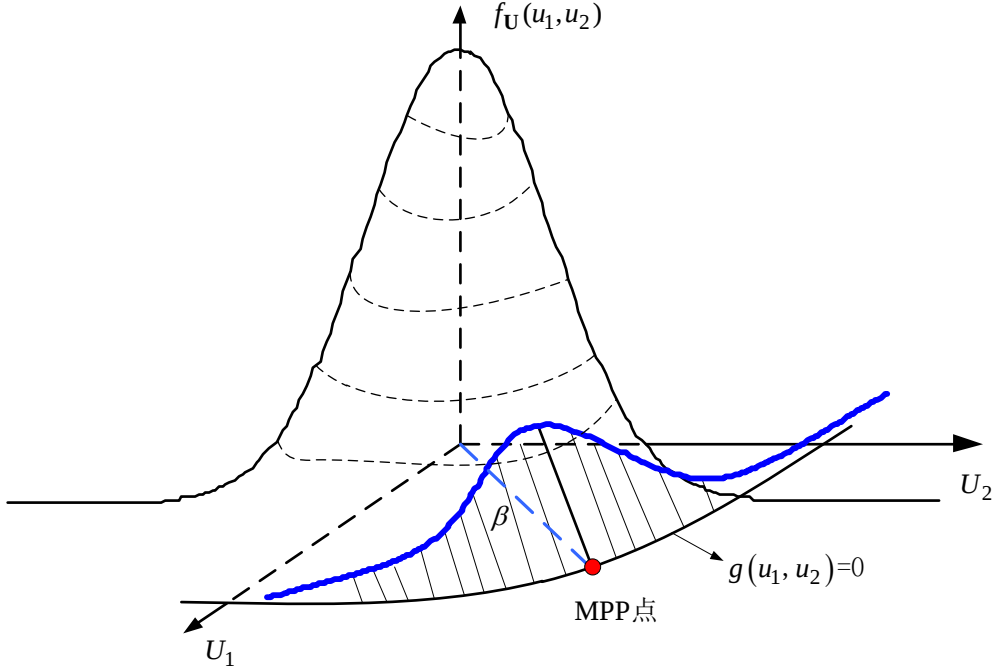


图 5-3 U-空间中 MPP 点示意图

步骤三：对极限状态函数进行近似。

(1) 一阶可靠度方法 (FORM)。为便于计算可靠度的积分, 将极限状态函数 $g(\mathbf{U})$ 在 MPP 点处进行一阶泰勒公式展开, 则有:

$$g(\mathbf{U}) \approx L(\mathbf{U}) = g(\mathbf{u}^*) + \nabla g(\mathbf{u}^*)(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)^T \quad (5-11)$$

式中, $\mathbf{u}^*$ 为展开点, $L(\mathbf{U})$ 为线性近似后的极限状态函数, $\nabla g(\mathbf{u}^*)$ 为函数 $g(\mathbf{U})$ 在展开点的梯度, 且满足:

$$\nabla g(\mathbf{u}^*) = \left(\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial U_1}, \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial U_2}, \dots, \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial U_n} \right) \bigg|_{\mathbf{u}^*} \quad (5-12)$$

由于 $L(\mathbf{U})$ 为线性函数, 根据正态分布的叠加性, $L(\mathbf{U})$ 的均值和方差分别为:

$$\mu_L = -\mathbf{u}^* \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial U_i} \bigg|_{\mathbf{u}^*} \quad (5-13)$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial U_i} \bigg|_{\mathbf{u}^*} \right)^2} \quad (5-14)$$

此时, 可靠度计算为:

$$R = \Pr\{g(\mathbf{X}) \geq 0\} = \Phi(\beta) = \Phi\left(\frac{\mu_L}{\sigma_L}\right) \quad (5-15)$$

(2) 二阶可靠度方法 (SORM)。将极限状态函数 $g(\mathbf{U})$ 在 MPP 点处进行二阶泰勒公式展开, 则有:

$$g(\mathbf{U}) \approx L(\mathbf{U}) = g(\mathbf{u}^*) + \nabla g(\mathbf{u}^*)(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)^T + \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)^T H(\mathbf{u}^*)(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)^T \quad (5-16)$$

式中, $H(\mathbf{u}^*)$ 为海森矩阵 (Hessian Matrix) 在 MPP 点处的取值, 且满足式(5-17)。

$$H(\mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g(\mathbf{U})}{\partial U_1^2}, \frac{\partial^2 g(\mathbf{U})}{\partial U_1 \partial U_2}, \dots, \frac{\partial^2 g(\mathbf{U})}{\partial U_1 \partial U_n} \\ \frac{\partial^2 g(\mathbf{U})}{\partial U_2 \partial U_1}, \frac{\partial^2 g(\mathbf{U})}{\partial U_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 g(\mathbf{U})}{\partial U_2 \partial U_n} \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{\partial^2 g(\mathbf{U})}{\partial U_n \partial U_1}, \frac{\partial^2 g(\mathbf{U})}{\partial U_n \partial U_2}, \dots, \frac{\partial^2 g(\mathbf{U})}{\partial U_n^2} \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

当可靠度指标 β 的值足够大时, 采用 SORM 求得可靠度的近似解为:

$$R = 1 - \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \beta \kappa_i)^{-\frac{1}{2}} \quad (5-18)$$

式中, κ_i 为极限状态方程在 MPP 点的第 i 个主曲率。

FORM 与 SORM 对极限状态函数的近似可用图 5-4 来表示。

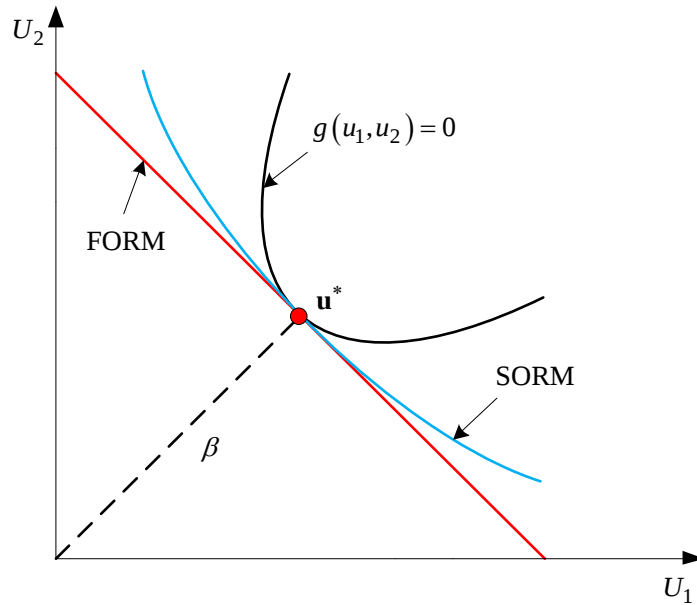


图 5-4 FORM 与 SORM 近似

采用 FORM 求解可靠性优化设计问题时，其中一个典型的模型可表示为：

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{d}} h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_x) \\ \text{s.t. } \Pr\{g_i(\mathbf{d}, \mathbf{U}) \geq 0\} = \Phi(\beta_i) \geq R_i, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (5-19)$$

式中， $h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_x)$ 为目标函数， $\boldsymbol{\mu}_x$ 为设计变量向量 $\mathbf{X}$ 的均值， R_i 为第 i 个要求的可靠度。与前述的可靠性分析类似，当采用性能测量法时，式(5-19)所表示的模型变为：

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{d}} h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_x) \\ \text{s.t. } Z_i^{R_i} = g(\mathbf{d}, \mathbf{u}_{MPP}^{R_i}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (5-20)$$

采用性能测量方法时，只进行必要水平的可靠性分析，而无需计算实际的可靠度，因此，求解式(5-20)的模型比求解式(5-19)的模型更加高效^[154]。

5.3 随机变量和区间变量混合下的可靠性优化设计

假设系统的输入包含随机变量和区间变量，那么系统的不确定性由服从精确概率分布的随机变量 $\mathbf{X}$ 和在某一区间 $[\mathbf{y}^l, \mathbf{y}^u]$ 内取值的区间变量 $\bar{\mathbf{Y}}$ 决定，从而系统响应 $Z = g(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \bar{\mathbf{Y}})$ 可以用概率分布以及区间进行描述。其中， $\mathbf{d}$ 为设计变量。若 $Z|\bar{\mathbf{Y}}$ 为区间变量 $\bar{\mathbf{Y}}$ 已知情况下的条件响应，则 $Z|\bar{\mathbf{Y}}$ 可以表示为随机变量 $\mathbf{X}$ 的函数，且能用边缘分布描述。若 $Z|\mathbf{X}$ 为随机变量 $\mathbf{X}$ 已知情况下的条件响应，则 $Z|\mathbf{X}$ 位于由确定性映射 $Z = g(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \bar{\mathbf{Y}})$ 和 $[\mathbf{y}^l, \mathbf{y}^u]$ 所确定的某一区间。

可靠性优化设计的目的是：在严格遵从可靠性约束的前提下，通过优化设计变量，使目标函数取极小值。若可靠性约束中存在随机变量和区间变量的混合，则只有当最坏情况下的可靠度得到满足，才能保证可靠性优化设计的正确。因此，本节将先通过计算求解最坏情况下的区间变量组合，再基于最坏情况进行可靠性优化设计。

5.3.1 双环法

最坏情况下，混合随机变量 $\mathbf{X}$ 和区间变量 $\bar{\mathbf{Y}}$ 的可靠性设计模型可以表示为：

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}} h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_x, \bar{\mathbf{Y}}) \\ & \text{s.t. } \Pr\{g_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}_{\text{worst}}, \mathbf{y}_{\text{worst}}) \geq 0\} = \Phi(\beta_{\text{worst}, i}) \\ & \quad = \Phi(\|\mathbf{u}_{\text{worst}, i}^{MPP}\|) \geq R_i, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5-21)$$

式中， $\beta_{\text{worst}, i}$ 为第 i 个可靠性约束在最坏情况下的可靠度指标， $\mathbf{y}$ 为 $\mathbf{y}^l$ 和 $\mathbf{y}^u$ 的平均值，则有：

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}^l + \mathbf{y}^u}{2} \quad (5-22)$$

搜寻 MPP 点为求极小值问题（优化问题），由于内层的可靠性分析环（内环）嵌套于整个优化环（外环）之中，在求解式(5-21)双环模型时，每进行一次外环优化都需要多次的内环可靠性分析，而每一次的内环可靠性分析都需要进行大量的约束函数计算，因此，该方法的计算量较大，计算效率较低。双环法的具体实施流程图如图 5-5 所示。

式(5-21)所描述的模型，可以用性能测量（PMA）的方法对其进行改进，修改后的模型为：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_x, \bar{\mathbf{Y}}) \\ \text{s.t. } z_{\text{worst}, i}^{R_i} = g_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}_{\text{worst}, i}^{MPP, R_i}, \mathbf{y}_{\text{worst}, i}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5-23)$$

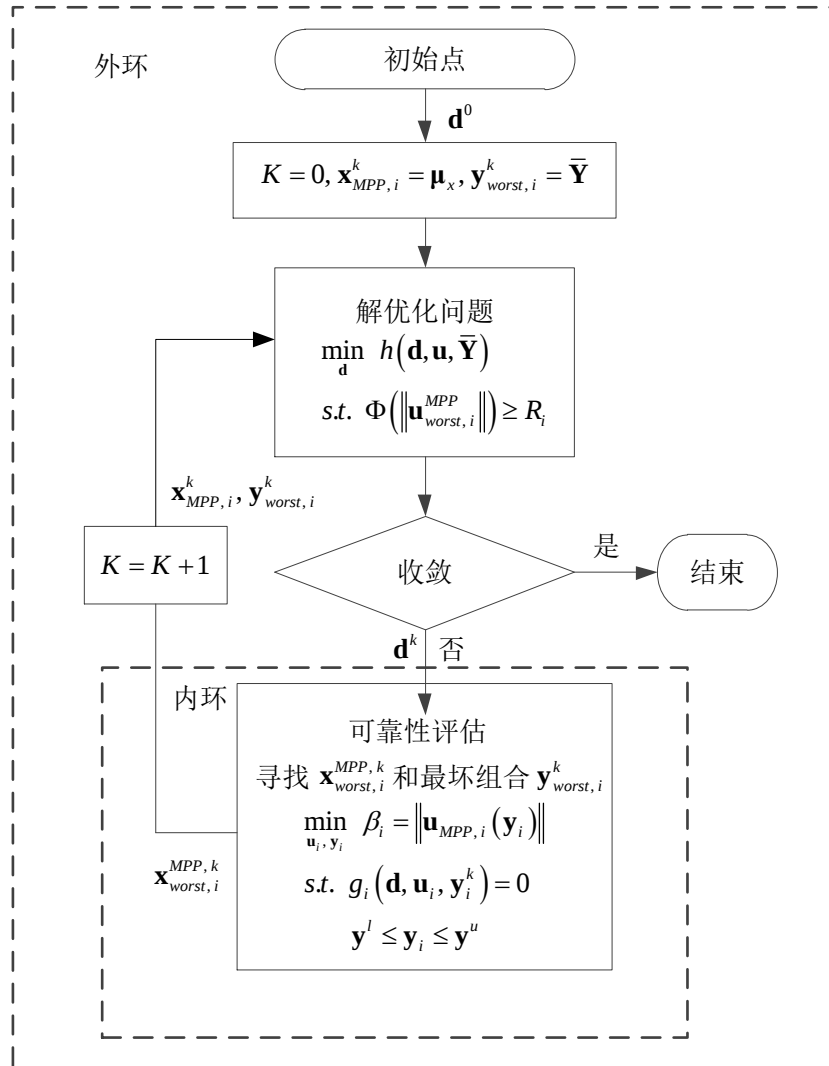


图 5-5 双环法实施流程图

改进后的具体求解流程图如图 5-7 所示。

MPP 点逆可靠性问题更简单，即通过搜索可靠性逆问题的 MPP 点来确定要求可靠度的性能测量，比直接搜索实际可靠度的 MPP 点更加容易，因此，改进后的模型和式(5-21)所描述的模型相比，其可靠度可直接计算，耗时少、效率高。由图 5-6 可知，虽然可靠性优化设计过程中的计算量有所降低，但整个可靠性优化设计仍为双环过程。

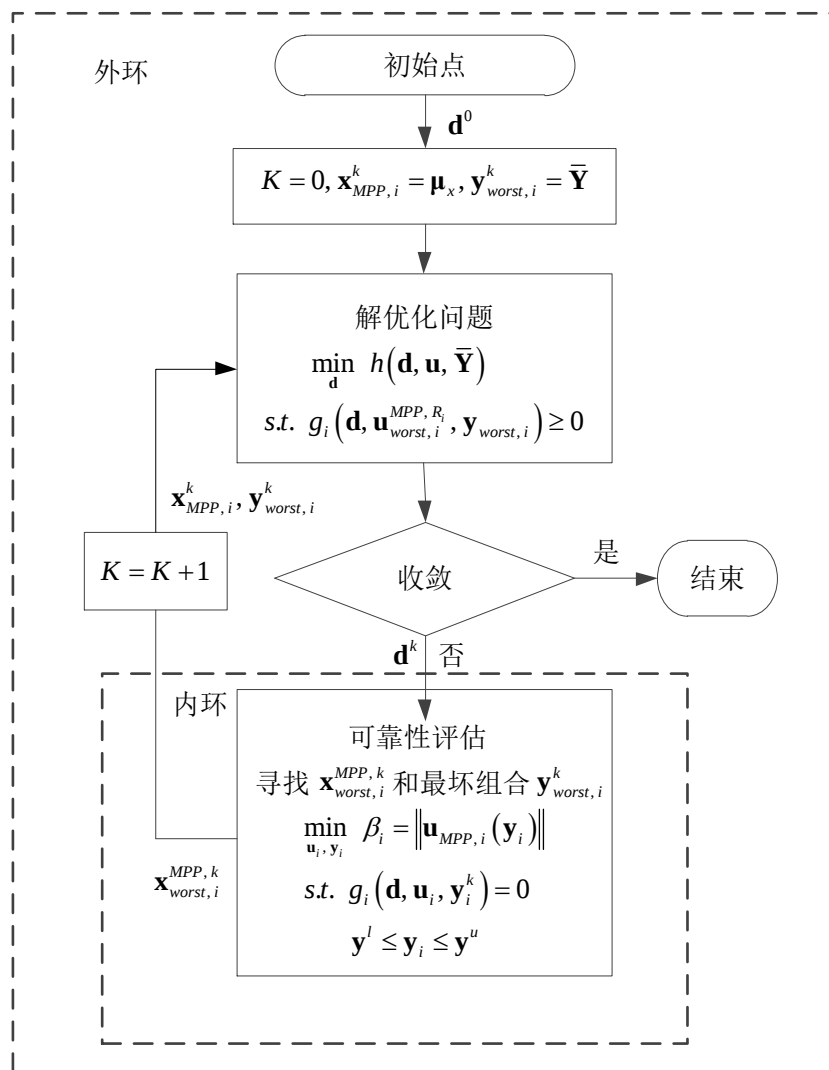


图 5-6 改进后的双环法实施流程图

5.3.2 序列单环法

序列单环法的基本思想是将原先的可靠性优化设计双环分解成一系列确定性优化设计环和可靠性分析环，并且确定性优化设计环和可靠性分析环是互相解耦的，确定性优化设计环中不含可靠性分析，仅在优化完成后进行可靠性分析。在整个过程中，优化环的个数与可靠性分析环的个数相等，这样，则使计算量大大减少，

效率相比于双环法有显著提高^[152, 200-202]。序列单环法的设计思想和运行流程图分别如图 5-7 和 5-8 所示。

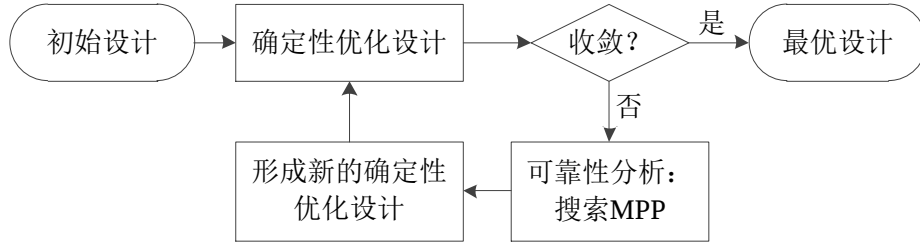


图 5-7 序列单环法的设计思想

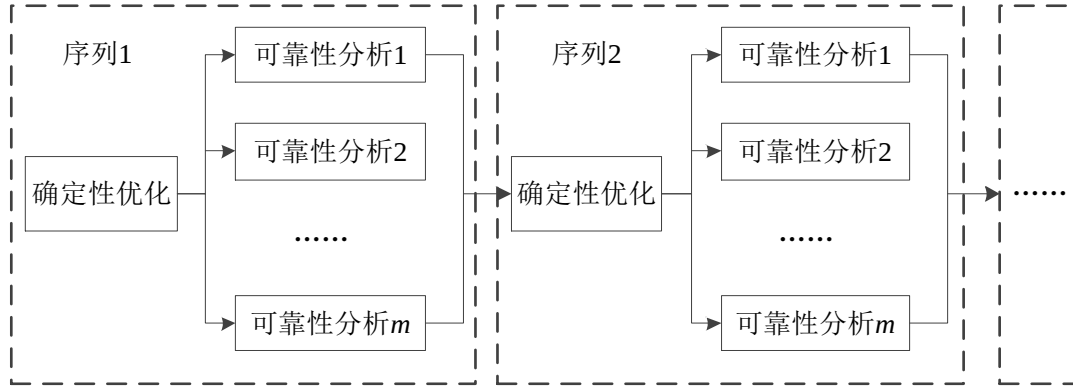


图 5-8 序列单环法的运行流程图

在进行第一个环的确定性优化时，最坏情况区间变量组合和 MPP 点的信息均未知，为了方便，可以分别设为区间变量平均值和随机变量均值，也可由设计者通过经验进行设定。首先，通过序列 1 的确定性优化得到最优设计 $\mathbf{d}^1$ ，然后进行可靠性分析，得到最坏情况下的 MPP 点 $\mathbf{u}_{\text{worst},i}^{MPP,R_i,1}$ 和区间变量组合 $\mathbf{y}_{\text{worst},i}^1$ 。此时，可能无法满足某些可靠性约束，如 $z_{\text{worst},i}^{R_i} = g_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}_{\text{worst},i}^{MPP,R_i,1}, \mathbf{y}_{\text{worst},i}^1) \geq 0$ ，于是将 $\mathbf{u}_{\text{worst},i}^{MPP,R_i,1}$ 和 $\mathbf{y}_{\text{worst},i}^1$ 选作新的初始点，用于构建序列 2 的确定性优化设计，模型为：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} & h(\mathbf{d}, \bar{\boldsymbol{\mu}}_x, \bar{\mathbf{Y}}) \\ \text{s. t. } & z_{\text{worst},i}^{R_i} = g_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}_{\text{worst},i}^{MPP,R_i,1}, \mathbf{y}_{\text{worst},i}^1) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5-24)$$

假如序列 1 中的可靠性要求无法满足，则在序列 2 的确定性优化过程中通过修改设计变量的值以提高可靠度。如果通过序列 2 的确定性优化得到的优化设计 $\mathbf{d}^2$ 仍不满足某些可靠性约束条件，则可采用通过序列 2 可靠性分析所得到的最坏情况 MPP 点 $\mathbf{u}_{\text{worst},i}^{MPP,R_i,2}$ 和区间变量组合 $\mathbf{y}_{\text{worst},i}^2$ 构建新的序列 3 优化模型：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} & h(\mathbf{d}, \bar{\boldsymbol{\mu}}_x, \bar{\mathbf{Y}}) \\ \text{s. t. } & z_{\text{worst},i}^{R_i} = g_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}_{\text{worst},i}^{MPP,R_i,2}, \mathbf{y}_{\text{worst},i}^2) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5-25)$$

重复以上过程，直至满足所有的可靠性约束，且目标函数趋于稳定。选取整个过程中的任意一序列 k 为例，具体操作流程如图 5-9 所示。

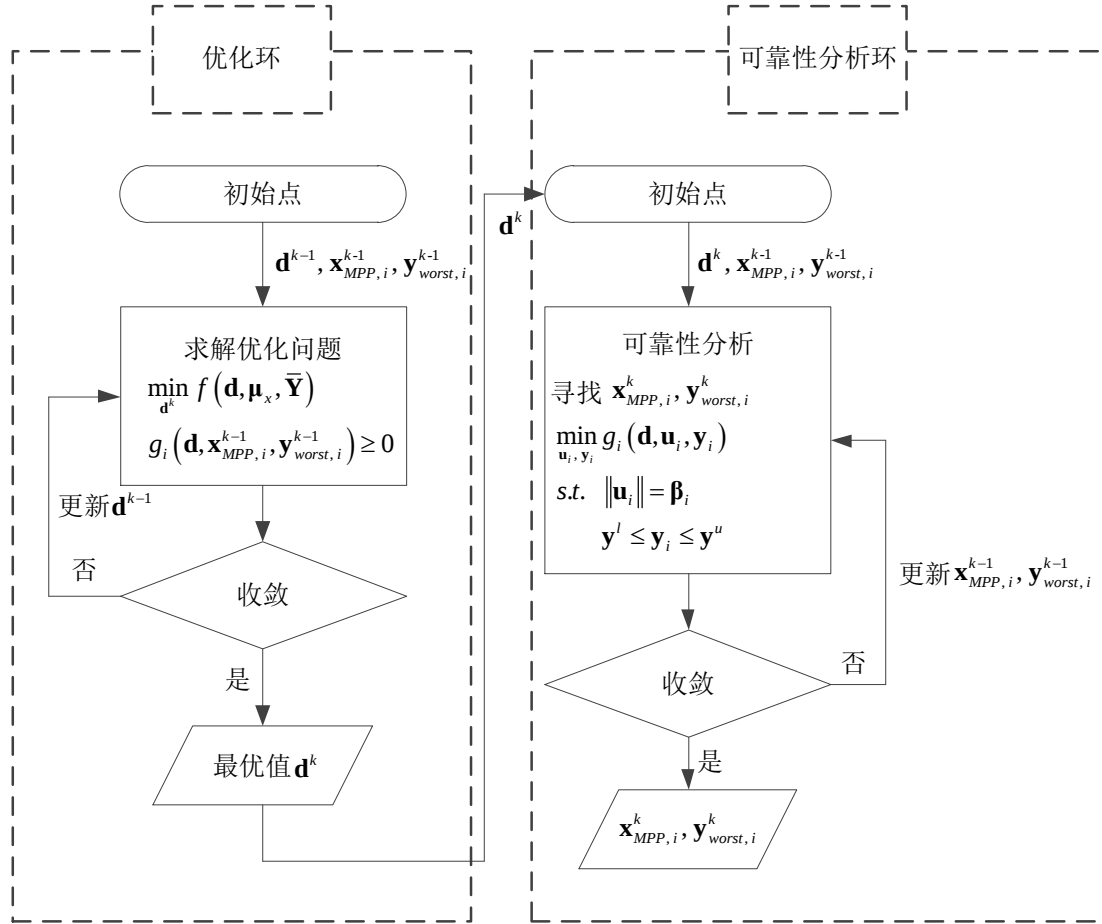


图 5-9 第 k 个序列的确定性优化和可靠性分析

5.4 模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计

在实际工程系统的可靠性设计优化中，常常存在多种变量混合的情况，加之建模过程中，由于无法准确知晓某些变量的概率密度函数，而仅能给出模糊值或取值区间，因此，研究模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计具有重要的理论价值和实际意义。5.3 小节中对随机变量和区间变量混合下的可靠性优化设计进行了简要介绍，本小节将基于此研究模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计问题。

本文第三章基于熵值不变，提出了将模糊变量转变为正态随机变量的等效转换方法。本小节将基于等效转换方法，将可靠性优化设计中的模糊变量全部转换为等价正态随机变量，这样模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计问题变成了随机变量和区间变量混合下的可靠性优化设计问题，再结合双环法或序列单环

法方法研究混合变量下的可靠性优化设计，提出基于最坏情况的模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计方法。

与随机变量和区间变量混合下的可靠性优化设计类似，基于最坏情况组合的模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计模型可以表示为：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} h(\mathbf{d}, \tilde{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}}) \\ \text{s.t. } \Pr\{g_i(\mathbf{d}, \tilde{\mathbf{x}}_{\text{worst}}, \mathbf{y}_{\text{worst}}) \leq 0\} \leq R_i, i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5-26)$$

式中， $\tilde{\mathbf{X}}$ 是模糊随机变量向量， $\bar{\mathbf{Y}}$ 为区间变量向量， $\mathbf{y}_{\text{worst}}$ 为最坏情况下区间变量组合。

以上模型包含模糊变量，无法直接采用前述的区间变量和随机变量混合下的可靠性优化设计方法求解，需要对模糊变量进行等效转换。Lei 和 Chen^[203]给出了三种不同隶属函数的模糊熵，分别如下：

1. 三角形分布

隶属函数为：

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a-a_1}, & a_1 \leq x \leq a \\ \frac{a_2-x}{a_2-a}, & a < x \leq a_2 \end{cases} \quad (5-27)$$

模糊熵满足：

$$G'(x) = 0.5 - \ln \frac{2}{a_2 - a_1} \quad (5-28)$$

2. 梯形分布

隶属函数为：

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{a_2+x-a}{a_2-a_1}, & a-a_2 \leq x \leq a-a_1 \\ 1, & a-a_1 < x \leq a+a_1 \\ \frac{a_2-x+a}{a_2-a_1}, & a+a_1 < x \leq a+a_2 \end{cases} \quad (5-29)$$

模糊熵满足：

$$G'(x) = \frac{a_2-a_1}{2(a_2+a_1)} - \ln \frac{1}{a_1+a_2} \quad (5-30)$$

3. Γ 分布

隶属函数为：

$$\mu(x) = \begin{cases} e^{k(x-a)}, & a - a_1 \leq x \leq a \\ e^{-k(x-a)}, & a < x \leq a + a_1 \end{cases} \quad (5-31)$$

模糊熵满足：

$$G'(x) = \frac{k}{2(e^{ka_1} + e^{-ka_1} - 2)} \left(\ln \frac{k}{2(e^{ka_1} - 1)} - 1 \right) \quad (5-32)$$

当模糊变量的隶属函数对称时，可将隶属函数的对称中心取为等价正态变量的均值。当模糊变量的隶属函数为以上三种类型中的一种且隶属函数不对称时，则通过选择对应的模糊熵，并结合式(3-16)得到等价正态随机变量的标准差；利用式(3-36)和对应的隶属函数计算等价正态随机变量的均值。当模糊变量的隶属函数不对称且不满足以上任意一种情况时，利用隶属函数、式(3-14)和式(3-16)计算等价正态随机变量的标准差；用隶属函数和式(3-36)计算等价正态随机变量的均值。设模糊变量向量 $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n)$ 中的每一个模糊变量均通过等价转换后，得到的等价正态随机变量向量为 $\mathbf{X}^{eq} = (X_1^{eq}, X_2^{eq}, \dots, X_n^{eq})$ ，此时，式(5-26)描述的模型可以转化为：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} h(\mathbf{d}, \mathbf{X}^{eq}, \mathbf{Y}) \\ \text{s.t. } \Pr \{ g_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_{worst}^{eq}, \mathbf{y}_{worst}) \geq 0 \} \geq R_i, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5-33)$$

式中， $\mathbf{X}^{eq}$ 是与模糊随机变量向量等价的正态随机变量向量。

通过转换，模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计变成了随机变量和区间变量混合下的可靠性优化设计，结合序列优化方法，则可快速地求得基于可靠性设计的最优解。

5.5 算例分析

5.5.1 十杆桁架结构可靠性优化设计

为说明本章所提方法的适用性，本小节对经典的十杆桁架结构进行可靠性优化设计。已知如图 5-10 所示十杆桁架^[204]，杆件弹性模量 $E = 68948 \text{MPa}$ ，密度 $\rho = 2768 \text{kg/m}^3$ ，水平方向和竖直方向的杆长 L 均为 9.144m ，所受外部载荷 $\tilde{P}_1$ 、 $\tilde{P}_2$ 、 $\tilde{P}_3$ 均为模糊值，且模糊载荷 $\tilde{P}_1$ 和 $\tilde{P}_2$ 的三角隶属函数为 $(400, 444.8, 490)$ ，模糊载荷 $\tilde{P}_3$ 的三角隶属函数为 $(1600, 1779.2, 1950)$ ，单位均为 kN ，节点 2 允许的最大竖直位移 $d_{2\max}$ 为 12.7cm ，杆件横截面积的最小值为 0.64516cm^2 ，杆件 1~10 的强度均为区间变量，且取值范围分别为 $\sigma_{s_i} \in [13.0975, 21.0975] (i = 1, 2, \dots, 8, 10)$ ， $\sigma_{s_9} \in [39.1125, 64.3125]$ ，单位为 kN/cm^2 ，各杆件的强度可靠度为 0.999。在满足强

度可靠度及位移约束下, 要求设计各杆件的横截面积 S_i ($i=1, 2, \dots, 10$), 使整个桁架结构重量最轻。

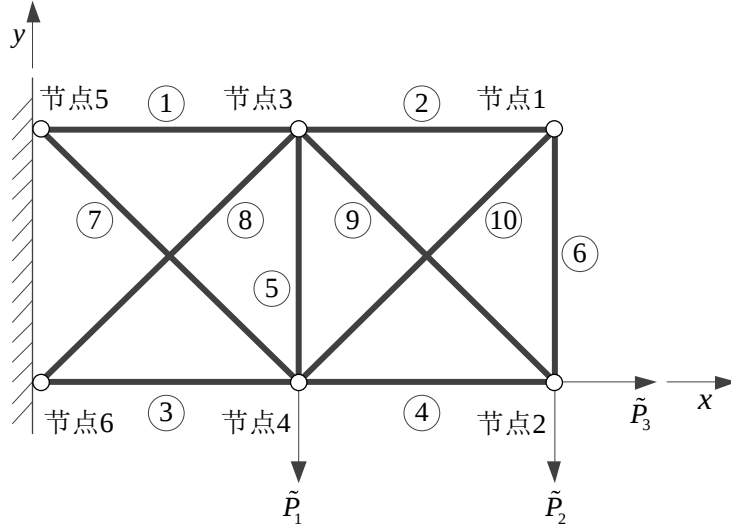


图 5-10 十杆桁架结构

十杆桁架所受到的外部载荷为模糊变量, 因此, 首先将模糊变量进行等价转换, 得到等价的正态随机变量 $P_1^{eq}, P_2^{eq}, P_3^{eq}$, 然后根据平衡和兼容性方程^[205], 各杆件受到的轴向力 N_i ($i=1, 2, \dots, 10$) 可以表示为:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = P_2^{eq} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_8, N_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} N_{10} \\ N_3 = -P_1^{eq} - 2P_2^{eq} + P_3^{eq} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_8 \\ N_4 = -P_2^{eq} + P_3^{eq} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{10} \\ N_5 = -P_2^{eq} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_8 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{10}, N_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} N_{10} \\ N_7 = \sqrt{2}(P_1^{eq} + P_2^{eq}) + N_8, N_8 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ N_9 = \sqrt{2}P_2^{eq} + N_{10}, N_{10} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{array} \right. \quad (5-34)$$

其中:

$$a_{11} = \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_5} + \frac{2\sqrt{2}}{S_7} + \frac{2\sqrt{2}}{S_8} \right) \frac{L}{2E} \quad (5-35)$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{L}{2S_5 E} \quad (5-36)$$

$$a_{22} = \left(\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_4} + \frac{1}{S_6} + \frac{2\sqrt{2}}{S_9} + \frac{2\sqrt{2}}{S_{10}} \right) \frac{L}{2E} \quad (5-37)$$

$$b_1 = \left[\frac{P_2^{eq}}{S_1} - \frac{P_1^{eq} + 2P_2^{eq} - P_3^{eq}}{S_3} - \frac{P_2^{eq}}{S_5} - \frac{2\sqrt{2}(P_1^{eq} + P_2^{eq})}{S_7} \right] \frac{\sqrt{2}L}{2E} \quad (5-38)$$

$$b_2 = \left[\frac{\sqrt{2}(P_3^{eq} - P_2^{eq})}{S_4} - \frac{\sqrt{2}P_2^{eq}}{S_5} - \frac{4P_2^{eq}}{S_9} \right] \frac{L}{2E} \quad (5-39)$$

节点 2 的最大位移可以计算为：

$$d_2 = \left(\sum_{i=1}^6 \frac{N_i^0 N_i}{S_i} + \sqrt{2} \sum_{i=7}^{10} \frac{N_i^0 N_i}{S_i} \right) \frac{L}{E} \quad (5-40)$$

式中， N_i^0 ($i=1,2,\dots,10$) 为 $P_1^{eq} = P_3^{eq} = 0, P_2^{eq} = 1$ 时，由式(5-34)计算得到的 N_i 值。至此，十杆桁架结构的可靠性设计优化模型可以表示为：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{S}} W(\mathbf{S}) &= \sum_{i=1}^{10} \rho S_i L_i = \rho L \left(\sum_{i=1}^6 S_i + \sqrt{2} \sum_{i=7}^{10} S_i \right) \\ \text{s.t. } \Pr \{ g_i(\mathbf{S}, \mathbf{P}^{eq}) = \sigma_{s_i} - \sigma_i \geq 0 \} &= 0.999, \quad i=1,2,\dots,10 \\ \Pr \{ g_{11}(\mathbf{S}, \mathbf{P}^{eq}) = d_{2\max} - d_{2y} \geq 0 \} &= 0.999, \quad i=1,2,\dots,10 \\ 0.64516 \leq S_i, \quad i &= 1,2,\dots,10 \end{aligned} \quad (5-41)$$

式中， W 为十杆桁架的总重量， σ_i 为各杆件受到的应力， d_{2y} 为节点 2 在竖直方向上的位移。

采用本章第三节介绍的方法，分别得到序列单环法和双环法下的最优化结果，并与等价转换后的确定性优化结果进行对比，如表 5-1 所示。

表 5-1 等价转换后十杆桁架不同优化算法的结果

变量	确定性优化	序列单环法	双环法
S_1/mm^2	33.4231	44.4546	44.4546
S_2/mm^2	0.6452	0.6452	0.6452
S_3/mm^2	47.9590	65.2346	65.2346
S_4/mm^2	100.6682	132.4582	132.4582
S_5/mm^2	27.8058	37.9862	37.9862

续表 5-1 等价转换后十杆桁架不同优化算法的结果

变量	确定性优化	序列单环法	双环法
S_6/mm^2	0.6452	0.6452	0.6452
S_7/mm^2	93.8489	123.4854	123.4854
S_8/mm^2	0.6452	0.6452	0.6452
S_9/mm^2	22.7690	31.1146	31.1146
S_{10}/mm^2	0.6934	0.9124	0.9124
W/kg	956.6447	1271.2604	1271.2604
函数计算次数	56	998	2891

从表 5-1 可知, 顺序单环法和嵌套双环法得到的优化结果一致。确定性优化设计没有考虑可靠度约束, 得到的目标函数值虽然最小, 但是不满足设计要求。由于顺序单环法将原来的双环进行了解耦, 将原来的双环可靠性优化设计变成了一系列的确定性优化设计和可靠性分析, 从而大大减少了函数计算次数, 使计算效率更为高效。

5.5.2 内燃机曲柄连杆机构可靠性优化设计

为进一步说明本章所提可靠性优化设计模型的工程适用性, 本小节将以图 5-11 所示的某内燃机曲柄连杆机构为例, 研究模糊变量和区间变量混合下的可靠性, 并对其进行可靠性优化设计。

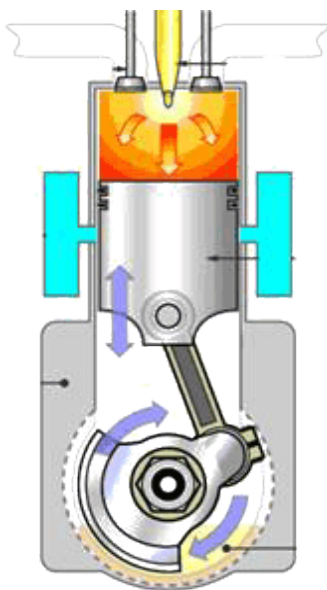


图 5-11 某内燃机曲柄连杆机构

将图 5-11 中的内燃机曲柄连杆机构进行简化, 得到图 5-12 所示机构运动简图。

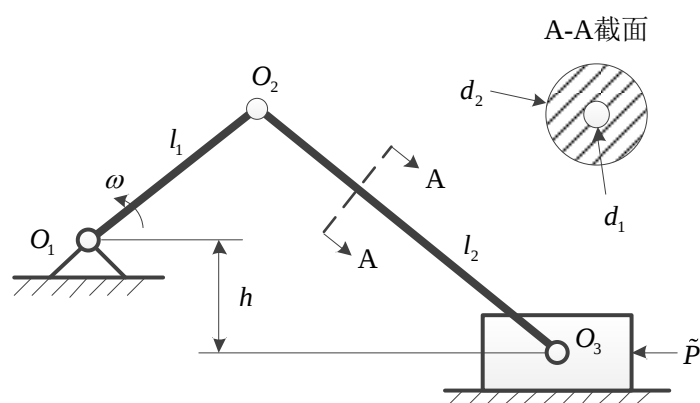


图 5-12 内燃机曲柄连杆机构运动简图

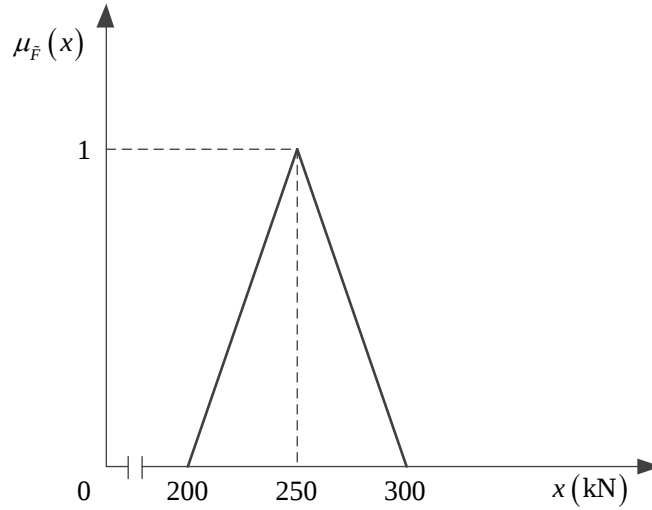
由于曲柄和连杆在制造、装配过程中均存在误差, 因此可将曲柄 O_1O_2 以及连杆 O_2O_3 的长度设为随机变量 l_1 和 l_2 。内燃机在做功过程中, 存在启动、加速、转弯、制动等不同工况, 在不同工况下, 气缸内气体对活塞的推力大小也不同, 即使在同一工况下, 燃油品质的不确定性也会导致推力存在不确定性, 在本小节中, 推力 $\tilde{F}$ 被视为模糊变量。弹性模量被定义为理想材料有小形变时应力与应变的比值, 而实际工程中的材料往往不是最理想的材料, 再加上制造工艺过程中的不确定性以及材料自身性能的不确定性等, 因此, 需将连杆弹性模量 $\tilde{E}$ 视为模糊值。屈服强度为抵抗微量塑性变形的应力, 屈服强度在测定过程中, 由于试验误差、测量误差以及人员因素等不确定, 导致屈服强度在某一固定值附近波动, 在本小节中, 用模糊变量 $\tilde{\sigma}_s$ 表示。随机变量 l_1 和 l_2 (在优化模型中分别用 x_1 和 x_2 表示) 的分布类型及参数如表 5-2 所示。

表 5-2 随机变量分布类型及参数

标识符	随机变量	分布类型	均值/mm	标准差/mm
x_1	l_1	正态分布	100	1
x_2	l_2	正态分布	300	3

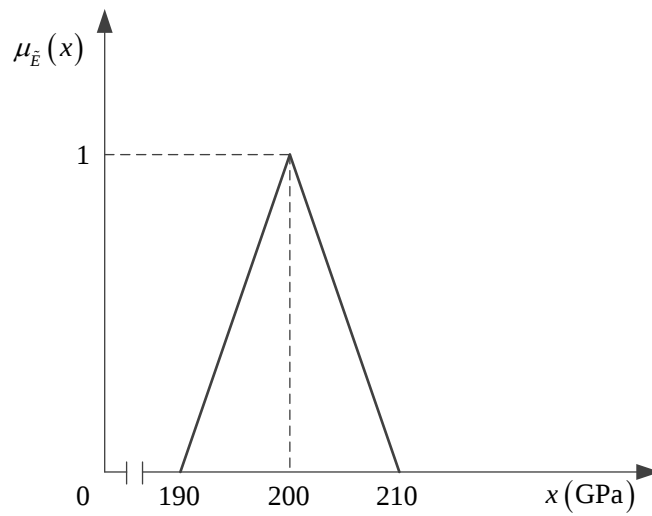
活塞所受推力 $\tilde{F}$ 的隶属函数服从三角分布, 其表达式及函数图像分别如式 (5-42) 和图 5-13。

$$\mu_{\tilde{F}}(x) = \begin{cases} \frac{x-200}{50}, & 200 \leq x \leq 250 \\ \frac{300-x}{50}, & 250 < x \leq 300 \end{cases} \quad (5-42)$$


 图 5-13 活塞所受推力 $\tilde{F}$ 的隶属函数

连杆弹性模量 $\tilde{E}$ 的隶属函数服从三角分布，其表达式及函数图像分别如式 (5-43) 和图 5-14 所示。

$$\mu_{\tilde{E}}(x) = \begin{cases} \frac{x-190}{10}, & 190 \leq x \leq 200 \\ \frac{210-x}{10}, & 200 < x \leq 210 \end{cases} \quad (5-43)$$


 图 5-14 连杆弹性模量 $\tilde{E}$ 的隶属函数

连杆屈服强度 $\tilde{\sigma}_s$ 的隶属函数服从梯形分布，其表达式及函数图像分别如式 (5-44) 和图 5-15 所示。

$$\mu_{\tilde{\sigma}_s}(x) = \begin{cases} \frac{x-275}{5}, & 275 \leq x \leq 280 \\ 1, & 280 < x < 300 \\ \frac{305-x}{5}, & 300 < x \leq 305 \end{cases} \quad (5-44)$$

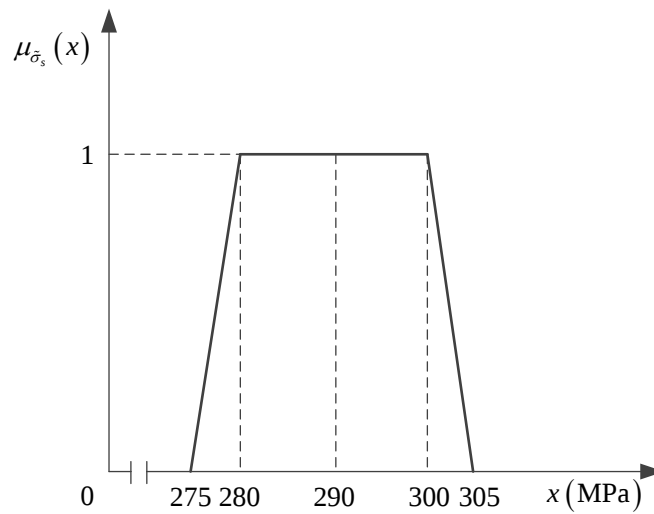


图 5-15 连杆屈服强度 $\tilde{\sigma}_s$ 的隶属函数

受加工工艺不确定性、制造过程中的误差及其它不确定因素影响，活塞与气缸壁之间的动摩擦系数 μ_k 的精确概率密度分布函数未知，仅知其大致取值范围。为适应不同的车型或满足不同的工作需要，曲柄连杆的偏移量 h 可以发生变化，但分布情况未知，仅知其取值范围。因此， h 和 μ_k 均视为区间变量（在优化模型中分别用 y_1 和 y_2 表示），其取值范围如表 5-3 所示。

表 5-3 区间变量的取值范围

标识符	区间变量	下界	上界
y_1	h	100mm	150mm
y_2	μ_k	0.15	0.25

该优化的目标是分别设计连杆的内外径 d_1 ($1 \leq d_1 \leq 80$) 和 d_2 ($10 \leq d_2 \leq 100$)，使得连杆满足强度和弯曲可靠度均为 0.9999 情况下，曲柄和连杆的总重量最轻。此

问题等价于求 d_1 和 d_2 使横截面面积最小，且连杆横截面面积可表示为：

$$S(\mathbf{d}) = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) \quad (5-45)$$

连杆的强度约束和弯曲应力约束可分别表示为：

$$\tilde{g}_1(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \tilde{\sigma}_s - \frac{4\tilde{F}(l_2 - l_1)}{\pi \left(\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - h^2} - \mu_k h \right) (d_2^2 - d_1^2)} \gtrsim 0 \quad (5-46)$$

和

$$\tilde{g}_2(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\pi^3 \tilde{E}(d_2^4 - d_1^4)}{64l_2^2} - \frac{\tilde{F}(l_2 - l_1)}{\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - h^2} - \mu_k h} \gtrsim 0 \quad (5-47)$$

式中， $\mathbf{X} = (x_1, x_2) = (l_1, l_2)$ ， $\mathbf{Y} = (y_1, y_2) = (h, \mu_k)$ 。

传统的确定性优化模型可表示为：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} S(\mathbf{d}) &= \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) \\ \text{s.t. } \tilde{g}_1(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \tilde{\sigma}_s - \frac{4\tilde{F}(l_2 - l_1)}{\pi \left(\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - h^2} - \mu_k h \right) (d_2^2 - d_1^2)} \gtrsim 0; \\ \tilde{g}_2(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{\pi^3 \tilde{E}(d_2^4 - d_1^4)}{64l_2^2} - \frac{\tilde{F}(l_2 - l_1)}{\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - h^2} - \mu_k h} \gtrsim 0; \\ 1 \leq d_1 \leq 80, 10 \leq d_2 \leq 100, d_1 < d_2 \end{aligned} \quad (5-48)$$

由于连杆需要的拉伸和弯曲可靠度均为 0.9999，将式(5-46)和(5-47)约束条件变为可靠性约束，则可得到基于可靠性的优化设计模型。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} S(\mathbf{d}) &= \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) \\ \text{s.t. } \Pr \left\{ \tilde{g}_1(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \tilde{\sigma}_s - \frac{4\tilde{F}(l_2 - l_1)}{\pi \left(\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - h^2} - \mu_k h \right) (d_2^2 - d_1^2)} \gtrsim 0 \right\} &\gtrsim 0.9999; \\ \Pr \left\{ \tilde{g}_2(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\pi^3 \tilde{E}(d_2^4 - d_1^4)}{64l_2^2} - \frac{\tilde{F}(l_2 - l_1)}{\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - h^2} - \mu_k h} \gtrsim 0 \right\} &\gtrsim 0.9999; \\ 1 \leq d_1 \leq 80, 10 \leq d_2 \leq 100, d_1 < d_2 \end{aligned} \quad (5-49)$$

在式(5-49)模型中，活塞所受推力 $\tilde{F}$ 、连杆的弹性模量 $\tilde{E}$ 、屈服强度 $\tilde{\sigma}_s$ 均为模

糊变量，因此，该模型为模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计模型。根据本文第三章的等效转换方法，可将模糊变量转化为正态随机变量，这样，模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计模型则转变为模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计模型。结合双环法和序列单环法，则可对该曲柄滑块机构进行可靠性优化设计。

首先，将活塞所受推力 $\tilde{F}$ 、弹性模量 $\tilde{E}$ 以及屈服强度 $\tilde{\sigma}_s$ 三个模糊变量分别进行等价转换，得到等价推力 F^{eq} 、等价弹性模量 E^{eq} 和等价屈服强度 σ_s^{eq} ，且有 $F^{eq} \sim N(250, 19.95^2)$ ， $E^{eq} \sim N(200, 3.99^2)$ ， $\sigma_s^{eq} \sim N(290, 6.69^2)$ 。等价转换完成后，模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计模型转变成模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计模型，此时等效转换后的模型可表示为：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} S(\mathbf{d}) &= \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) \\ \text{s.t. } \Pr \left\{ g_1(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sigma_s^{eq} - \frac{4F^{eq}(l_2 - l_1)}{\pi \left(\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - h^2} - \mu_k h \right) (d_2^2 - d_1^2)} \geq 0 \right\} &\geq 0.9999; \\ \Pr \left\{ g_2(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\pi^3 E^{eq} (d_2^4 - d_1^4)}{64l_2^2} - \frac{F^{eq}(l_2 - l_1)}{\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - h^2} - \mu_k h} \geq 0 \right\} &\geq 0.9999; \\ 1 \leq d_1 \leq 80, 10 \leq d_2 \leq 100, d_1 < d_2 \end{aligned} \quad (5-50)$$

利用本章第三节介绍的方法，分别得到等价转换后序列单环法和双环法下的最优化结果，并与等价转换后的确定性优化结果进行对比，如表 5-4 所示。

表 5-4 等价转换后不同优化算法的结果

	确定性优化	顺序单环法优化	双环法优化
优化变量 $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$	(20.30, 40.61)	(27.58, 55.99)	(27.58, 55.99)
目标函数值 $S(\mathbf{d})$	971.60	1864.71	1864.71
最坏情况下 g_1 值	-	0	0
最坏情况下 g_2 值	-	4.15	4.15
最坏情况下的 (y_1, y_2)	-	(150, 0.25)	(150, 0.25)
函数计算次数	19	408	1032

由表 5-4 可知,确定性优化设计得到的目标函数值最小,但未考虑可靠度约束,因此,该设计不一定可靠。顺序单环法和嵌套双环法加入了可靠性约束,得到的优化结果一致。顺序单环法将原来的双环进行解耦,大大减少了函数计算次数,从而提高了计算效率。

5.6 本章小节

本章首先基于最坏情况建立了随机变量和区间变量混合下的可靠性模型,并针对随机变量和区间变量混合下的机构或系统进行可靠性优化设计。其次,将随机变量和区间变量混合的情况扩展到模糊变量和区间变量混合的情况,并基于熵值不变,即模糊变量的模糊熵等于随机变量的概率熵,将模糊变量向正态随机变量进行转化,从而将模糊变量和区间变量混合下的可靠性设计优化问题转变为随机变量和区间变量混合下的可靠性设计优化问题,并分别利用双环法和序列单环法,对随机变量和区间变量混合下的可靠性模型进行可靠性优化设计。本章所提新方法为包含多类型不确定性变量的可靠性优化设计提供了一种新的求解思路。值得注意的是,基于最坏情况的可靠度设计结果相对于随机可靠度的结果偏保守,但是,对没有足够信息来描述不确定性因素时的可靠性设计优化,采用此设计方法能够确保结构的安全。

第六章 总结与展望

6.1 本文主要研究结论

随着现代工业和制造技术的飞速发展,机械系统日趋大型化、复杂化和多功能化。良好的可靠性是保证系统发挥其功能的基础,因此,如何保证大型复杂机械系统在使用过程中的安全性和可靠性,已成为工业界和学术界关注的热点问题。目前,工程实际中的机械系统大多形式复杂,但为了节约成本或满足其它性能要求,还需要对其进行轻量化设计,如汽车、坦克、高铁、飞机等。为同时满足高可靠、长寿命以及轻量化设计等要求,在对复杂机械系统进行可靠性分析的基础上,还需进行优化设计。然而,由于传统可靠性分析方法未考虑机械系统在服役过程中载荷作用历程的影响,再加上诸多不确定因素的影响,致使此类方法已无法满足工程需求,亟需研究新的动态可靠性分析方法,以及基于可靠性分析的优化设计方法,以提高机械系统使用安全性、预防事故发生以及减少经济损失。

本文在对现有动态可靠性分析模型与方法进行深度调研的基础上,分别研究了复杂载荷下的动态可靠性分析模型、混合变量下的可靠性分析方法、考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法以及混合变量下的可靠性优化设计方法,主要研究成果如下:

(1) 提出了考虑强度退化和冲击载荷作用的动态可靠性模型。机械系统在实际工程应用中,经常受到冲击载荷等的作用,加之长时间的使用,使得机械结构因疲劳而导致结构强度下降。为了能对机械结构或系统的动态可靠度进行更准确的评估,本文考虑冲击载荷作用以及强度退化的影响,对复杂载荷及强度退化下的系统可靠性模型和可靠性分析方法进行了研究,提出了考虑强度退化和冲击载荷作用的动态可靠性模型,针对系统在随机载荷和随机强度退化下计算效率低下的问题,提出基于高斯-勒让德积分公式的可靠度计算方法。通过与蒙特卡洛仿真结果的对比,发现运用动态可靠性模型可得到与蒙特卡洛方法相近的分析结果,而高斯-勒让德积分公式在计算动态可靠度方面具有较高精度,从而证明了本文所建立的动态可靠性模型的正确性和有效性。

(2) 提出了基于熵值不变的系统可靠性分析方法。在机械系统的设计过程中,由于信息不全、数据不足或知识水平有限,致使可靠性分析中常将无法确定的变量考虑为模糊变量或区间变量等。对于只包含模糊变量的可靠性分析,常用的方法有水平截集法等。但在工程实际中,多种变量混合的情形较多。因此,本文基于熵值不变性,通过等效转换,将模糊变量转变为正态随机变量,并研究了模糊变量和 p -

box 变量混合情况下的可靠性分析方法,提出了一种全新系统可靠性分析方法。通过与蒙特卡洛方法的对比发现,所提方法具有较高的预测精度,可用于随机和认知不确定性同时存在下的动态可靠性评估。

(3) 提出了考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法。随着机械系统向大型化、复杂化方向的发展,系统的功能也越来越多。当系统的某一个功能发生失效时,不一定导致整个机械系统的完全失效,所以不能简单地用完好和失效来描述复杂机械系统的功能。而且在工程中,由于信息不全、数据不足或测量误差等,系统的性能仅给出一个大概的值。在这种情况下,复杂机械系统的可靠性问题可视为多态系统的模糊可靠性分析。此外,组成系统的各个零部件或子系统之间是有联系的,系统主元件常常影响甚至控制其它元件的性能水平。因此,本文基于模糊通用生成函数考虑主元件与其它元件间的主从关系,提出了考虑相关性的多态系统模糊可靠性分析方法。

(4) 提出了模糊变量和区间变量混合下的系统可靠性优化设计方法。随着科技的发展与社会的进步,人们的质量意识越来越强,对机械系统也提出了更高的质量要求;另一方面,为实现设计参数和其它性能的最优,还需对机械系统进行轻量化、成本最小等设计。机械可靠性优化设计是在满足可靠度的前提下,对机械结构或系统进行最优设计,能同时兼顾可靠性要求和轻量化等设计要求。目前的可靠性设计优化方法中,对于包含模糊变量情形下的优化设计研究较少。本文在第三章基础上,对模糊变量进行等价转换,把模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计变成随机变量和区间变量混合下的可靠性优化设计,提出了模糊变量和区间变量混合下的可靠性优化设计方法。

6.2 后续工作展望

为满足工程需求,现代机械系统越来越复杂,且朝高速、重载方向发展,使机械系统的服役环境也越来越恶劣。为保障系统的安全性和减少经济损失,对系统进行高效准确可靠性预测及可靠性评估意义重大,这也使现有的动态可靠性分析模型和方法面临着巨大的挑战。同时,对于现代机械系统,不仅对其可靠性有较高要求,还对重量、价格等方面提出了更为严苛的条件。为解决以上问题,本文分别对机械系统动态可靠性分析方法和可靠性优化设计方法进行研究,以弥补现有可靠性分析和优化设计方法的不足,为机械系统的安全评估、可靠管理、维修决策、性能优化等提供理论依据和信息支撑。随着现代工程机械和武器装备等复杂程度的不断提高,机械系统在动态可靠性分析和可靠性优化设计中面临的问题将层出不穷。为进一步保证系统的安全可靠并降低机械系统的成本,更加全面、深入地开展

动态可靠性分析方法及可靠性优化设计方法研究是十分必要的。基于目前已完成的部分工作，后续拟开展的研究内容包括：

（1）强度应力相关的动态可靠性模型研究。通常，机械结构或系统在不同载荷作用下会表现出不同的性能，这是因为载荷应力的的大小会对机械结构的强度造成影响。传统的基于应力-强度干涉理论建立的可靠性分析模型大都假定强度与应力之间是相互独立的。因此，为了更准确地进行系统动态可靠性分析和预测，拟在今后的研究中考虑强度与应力之间的相关性，建立考虑强度应力相关的动态可靠性模型。

（2）系统性能水平和对应概率为模糊过程的多态系统模糊可靠性分析方法研究。机械系统受外部载荷以及服役环境等不确定性因素的影响，其性能水平以及处于相应性能水平的概率均存在较大分散性。针对机械系统的多工况特性和服役环境复杂性，拟采用模糊过程对系统的性能水平和处于相应性能水平的概率进行描述，建立模糊过程下的多态系统模糊可靠性分析方法。

（3）模糊变量和 p -box 变量混合下的可靠性优化设计方法研究。由于组成机械系统的各零部件在材料性能、加工工艺等方面均存在差异，为使机械系统有着较高可靠性并保证其性能达到最优水平，拟采用水平截集法或基于模糊变量等价转换法对模糊变量进行处理，并结合序列优化，构建模糊变量和 p -box 变量混合下的可靠性优化设计方法。

致 谢

米歇潘说：生命是一条艰险的峡谷，只有勇敢的人才能通过。在我看来，人生本来就是一个永不停歇的学习过程。还依稀记得十三年前，我从一个偏僻的农村考入电子科技大学，从而成为我们村第一个考上重点大学的学生。未觉池塘春草梦，阶前梧叶已秋声！转瞬间，我已从舞象之年的风华正茂到了而立之年的“中年油腻”。回首过往六载硕博时光，我刻苦钻研、奋力拼搏，听过夏日凌晨两点成电的蛙叫，也见过冬日清晨五点校园的寂静；有过论文接收后的激动与欣喜，也有论文被拒后的难过与遗憾。在又一年春暖花开的毕业季，我即将完成博士求学之路，谨在此向所有关心和帮助过我的亲朋好友、师长以及同学表示最衷心的感谢！

首先，我要感谢我的恩师黄洪钟教授，您是良师，亦是益友，更似慈父！感谢您将我带入可靠性的殿堂，鞭策我在科研中不断前行；感谢您对我论文写作中的指导，是您一次次仔细和严格的修改，才使我的论文最终得以接收；感谢您以身作则，教导我要学会感恩，深思做人的道理；感谢您的抬爱和热心介绍，让我组建了自己的小家庭。您渊博的专业知识、精益求精的工作作风和平易近人的人格魅力都对我影响深远。您在学术上意识超前、治学严谨，在可靠性领域享有盛誉；您不仅关心我的身体状况，还在生活中从多方面给予我支持，让我深受感动。我深知我取得的每一点小成绩无不凝聚着您的心血，在以后的日子里，我会铭记师恩，继续努力前行。在此，衷心希望恩师在工作的同时多保重身体。

其次，我要感谢汪忠来老师、刘宇老师、张小玲老师、凌丹老师、李彦锋老师等在学术上给予的指导与帮助；感谢师兄肖宁聪博士、彭卫文博士、殷毅超博士、付国忠博士、师姐米金华博士；感谢同窗好友郑波博士、李翔宇博士等在生活中的陪伴与学术上的交流；感谢系统可靠性与安全性研究中心的其他老师和全体研究生，谢谢你们创造如此良好的科研氛围。特别感谢已经毕业的硕士生同学赵东飞、杨亮、李捷和张凡，每次在我心情低落时给我安慰；在我濒临气馁时给我鼓励；在我孤独绝望时给我陪伴。

再次，我要感谢我的父母！从呱呱坠地那一刻到如今的已为人父，感谢二老近三十年来对我的养育之恩！是二老的不辞辛劳与默默支持，才使我顺利地走上攻博之路。感谢我的岳父岳母及妻子高会英博士，你们的爱与鼓励，让我敢于面对生活中的一切困难。感谢我的宝贝女儿，你天真的眼神和可爱的笑容是鼓励我不断前行的动力，希望你能够健康快乐的成长！

最后，对审阅论文的各位专家和参考文献的全部作者一并表示感谢！

参考文献

- [1] 王正, 谢里阳. 机械时变可靠性理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012
- [2] 李世军. 非概率可靠性理论及相关算法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2013
- [3] 王熙照, 翟俊海. 基于不确定性的决策树归纳[M]. 北京: 科学出版社, 2012
- [4] 郭迅. 考虑中介状态的可靠性分析方法在星载展开天线系统中的应用[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2010
- [5] K. Y. Cai. System failure engineering and fuzzy methodology: an introductory overview[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 83(2): 113-133
- [6] 黄洪钟. 对常规可靠性理论的批判性评述——兼论模糊可靠性理论的产生、发展及应用前景[J]. 机械设计, 1994, (3): 1-5
- [7] 李艺, 闫运起. 现役结构时变可靠性评估[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2004
- [8] P. D. T. O'Connor, A. Kleyner. Practical reliability engineering[M]. New York: John Wiley & Sons, 2012
- [9] M. Cazuguel, C. Renaud, J. Y. Cognard. Time-variant reliability of nonlinear structures: application to a representative part of a plate floor[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2006, 22(1): 101-118
- [10] S. O. Rice. Mathematical analysis of random noise[J]. Bell Labs Technical Journal, 1944, 23(3): 282-332
- [11] A. J. F. Siegert. On the first passage time probability problem[J]. Physical Review, 1951, 81(4): 617-623
- [12] C. Helstrom, C. Isley. Two notes on a Markoff envelope process (Corresp.)[J]. IRE Transactions on Information Theory, 1959, 5(3): 139-140
- [13] J. J. Coleman. Reliability of aircraft structures in resisting chance failure[J]. Operations Research, 1959, 7(5): 639-645
- [14] S. H. Crandall, K. L. Chandiramani, R. G. Cook. Some first-passage problems in random vibration[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(3): 532-538
- [15] P. D. Spanos, I. A. Kougiumtzoglou. Galerkin scheme based determination of first-passage probability of nonlinear system response[J]. Structure and Infrastructure Engineering, 2014, 10(10): 1285-1294
- [16] 徐明, 金华斌. 非弹性碰撞振动系统的首次穿越分析[J]. 振动与冲击, 2016, 35(17): 197-200

- [17] K. Breitung. Asymptotic crossing rates for stationary Gaussian vector processes[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 1988, 29(2): 195-207
- [18] G. Schall, M. H. Faber, R. Rackwitz. The ergodicity assumption for sea states in the reliability estimation of offshore structures[J]. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 1991, 113(3): 241-246
- [19] S. Engelund, R. Rackwitz, C. Lange. Approximations of first-passage times for differentiable processes based on higher-order threshold crossings[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1995, 10(1): 53-60
- [20] R. Rackwitz. Computational techniques in stationary and non-stationary load combination: a review and some extensions[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1998, 25(1): 1-20
- [21] R. E. Melchers. *Structural reliability analysis and prediction*[M]. Chichester: Wiley, 2018
- [22] Z. Hu, X. Du. Time-dependent reliability analysis with joint upcrossing rates[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48(5): 893-907
- [23] C. Andrieu-Renaud, B. Sudret, M. Lemaire. The PHI2 method: a way to compute time-variant reliability[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2004, 84(1): 75-86
- [24] C. Jiang, X. P. Huang, X. Han, et al. A time-variant reliability analysis method based on stochastic process discretization[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2014, 136(9): 091009
- [25] Z. Hu, S. Mahadevan. Time-dependent system reliability analysis using random field discretization[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2015, 137(10): 101404
- [26] Z. Wang, P. Wang. A nested extreme response surface approach for time-dependent reliability-based design optimization[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2012, 134(12): 121007
- [27] 林小燕. 考虑失效相关的采煤机摇臂齿轮系统动态可靠性研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2017
- [28] J. Li, Z. P. Mourelatos. Time-dependent reliability estimation for dynamic problems using a niching genetic algorithm[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2009, 131(7): 071009
- [29] A. Singh, Z. P. Mourelatos, E. Nikolaidis. An importance sampling approach for time-dependent reliability[C]. *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Washington DC, 2011, 1077-1088
- [30] 单晓芳. 供热管网动态可靠性的建模及仿真[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2016
- [31] A. A. Czarnecki, A. S. Nowak. Time-variant reliability profiles for steel girder bridges[J]. *Structural Safety*, 2008, 30(1): 49-64
- [32] 张红旗, 邵晓东, 胡祥涛. 基于部分可观察马尔可夫决策过程的机电装备动态可靠性评价方法[J]. *中国机械工程*, 2016, 27(18): 2482-2486

- [33] K. Breitung, R. Rackwitz. Nonlinear combination of load processes[J]. Journal of Structures and Machines, 1982, 10(2): 145-166
- [34] K. Breitung. The extreme value distribution of non-stationary vector processes[C]. International Conference on Structural Safety and Reliability, San Francisco, 1989, 1327-1332
- [35] K. Breitung. Asymptotic approximations for the crossing rates of Poisson square waves[C]. Proceedings of the Conference on Extreme Value Theory and Applications, Gaithersburg, 1994, 75-80
- [36] 高明君, 张国义, 高家一, 等. 基于强度退化的机构模糊动态可靠性分析方法[J]. 强度与环境, 2015, 42(1): 54-62
- [37] 丁飞, 王谦. 液压支架结构疲劳动态可靠性评估方法[J]. 中国安全科学学报, 2015, 25(6): 86-90
- [38] H. S. Li, A. L. Zhao, K. F. Tee. Structural reliability analysis of multiple limit state functions using multi-input multi-output support vector machine[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2016, 8(10): 1-11
- [39] J. Zhang, X. Du. Time-dependent reliability analysis for function generator mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(3): 031005
- [40] B. Sudret, A. D. Kiureghian. Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report[R]. Berkeley: Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, 2000
- [41] J. D. Sørensen. Notes in structural reliability theory and risk analysis[M]. Aalborg: Aalborg University, 2004
- [42] J. O. Royset, A. D. Kiureghian, E. Polak. Optimal design with probabilistic objective and constraints[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2006, 132(1): 107-118
- [43] J. Li, Z. P. Mourelatos. Reliability estimation for time-dependent problems using a niching genetic algorithm[C]. ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Las Vegas, 2007, 1119-1133
- [44] C. Andrieu-Renaud, B. Sudret, M. Lemaire. The PHI2 method: a way to compute time variant reliability[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 84(1): 75-86
- [45] B. Sudret. Analytical derivation of the outcrossing rate in time-variant reliability problems[J]. Structure and Infrastructure Engineering, 2008, 4(5): 353-362
- [46] Z. Wang, X. Zhang, H. Z. Huang, et al. A simulation method to estimate two types of time-varying failure rate of dynamic systems[J]. Journal of Mechanical Design, 2016, 138(12): 121404

- [47] Z. P. Mourelatos, M. Majcher, V. Pandey, et al. Time-dependent reliability analysis using the total probability theorem[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2015, 137(3): 031405
- [48] M. A. Torres, S. E. Ruiz. Structural reliability evaluation considering capacity degradation over time[J]. *Engineering Structures*, 2007, 29(9): 2183-2192
- [49] 欧进萍. 多自由度体系的动力可靠性分析[J]. *地震工程与工程振动*, 1987, 7(4): 51-61
- [50] D. Zhang, X. Han, C. Jiang, et al. Time-dependent reliability analysis through response surface method[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2017, 139(4): 041404
- [51] Z. Hu, X. Du. A sampling approach to extreme value distribution for time-dependent reliability analysis[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2013, 135(7): 071003
- [52] Z. Wang, Z. P. Mourelatos, J. Li, et al. Time-dependent reliability of dynamic systems using subset simulation with splitting over a series of correlated time intervals[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2014, 136(6): 061008
- [53] G. Becker, L. Camarinopoulos, D. Kabranis. Dynamic reliability under random shocks[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2002, 77(3): 239-251
- [54] 黄飞腾, 郁军, 肖航. 基于 Markov 状态转移的动态可靠性分析[J]. *海军工程大学学报*, 2002, 14(6): 80-83
- [55] H. Streicher, R. Rackwitz. Time-variant reliability-oriented structural optimization and a renewal model for life-cycle costing[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 19(1-2): 171-183
- [56] L. Tian, A. Noore. Dynamic software reliability prediction: an approach based on support vector machines[J]. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 2005, 12(4): 309-321
- [57] 王新刚, 张义民, 王宝艳. 机械零部件的动态可靠性分析[J]. *兵工学报*, 2009, 30(11): 1510-1514
- [58] V. Kopustinskas, J. Augutis, S. Rimkevičius. Dynamic reliability and risk assessment of the accident localization system of the Ignalina NPP RBMK-1500 reactor[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2005, 87(1): 77-87
- [59] 苏春, 沈戈, 许映秋. 基于随机故障 Petri 网的液压系统可靠性建模与分析[J]. *液压与气动*, 2006(6): 29-31
- [60] A. Zayed, Y. Garbatov, C. G. Soares. Time variant reliability assessment of ship structures with fast integration techniques[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2013, 32: 93-102
- [61] Z. Wang, P. Wang. A double-loop adaptive sampling approach for sensitivity-free dynamic reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2015, 142: 346-356

- [62] J. H. Park. Time-dependent reliability of wireless networks with dependent failures[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2017, 165: 47-61
- [63] N. C. Xiao, M. J. Zuo, C. Zhou. A new adaptive sequential sampling method to construct surrogate models for efficient reliability analysis[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2018, 169: 330-338
- [64] S. Yu, Z. Wang, K. Zhang. Sequential time-dependent reliability analysis for the lower extremity exoskeleton under uncertainty[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2018, 170: 45-52
- [65] 拓耀飞. 不确定弹性机构可靠性分析及其优化设计研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2007
- [66] A. Ejlali, S. G. Miremadi. FPGA-based Monte Carlo simulation for fault tree analysis[J]. Microelectronics Reliability, 2004, 44(6): 1017-1028
- [67] M. Marseguerra, E. Zio, J. Devooight, et al. A concept paper on dynamic reliability via Monte Carlo simulation[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 1998, 47(2-5): 371-382
- [68] J. Li, J. Chen, W. Fan. The equivalent extreme-value event and evaluation of the structural system reliability[J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 112-131
- [69] A. Singh, Z. P. Mourelatos, J. Li. Design for lifecycle cost using time-dependent reliability[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(9): 091008
- [70] X. Guo, G. D. Cheng. Recent development in structural design and optimization[J]. Acta Mechanica Sinica, 2010, 26(6): 807-823
- [71] A. Singh, Z. Mourelatos, E. Nikolaidis. Time-dependent reliability of random dynamic systems using time-series modeling and importance sampling[J]. SAE International Journal of Materials and Manufacturing, 2011, 4(1): 929-946
- [72] 吴斌, 欧进萍, 张纪刚, 等. 结构动力可靠度的重要抽样法[J]. 计算力学学报, 2001, 18(4): 478-482
- [73] 于霖冲, 白广忱, 焦俊婷, 等. 柔性机构变形动态响应可靠性分析方法[J]. 宇航学报, 2006, 27(5): 1039-1043
- [74] V. S. Sundar, C. S. Manohar. Time variant reliability model updating in instrumented dynamical systems based on Girsanov's transformation[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2013, 52: 32-40
- [75] A. Singh, Z. Mourelatos. On the time-dependent reliability of non-monotonic, non-repairable systems[J]. SAE International Journal of Materials and Manufacturing, 2010, 3(1): 425-444
- [76] 张加兴. 基于子集模拟法的结构动力可靠度研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2012

- [77] 宋述芳, 吕震宙. 基于马尔可夫蒙特卡洛子集模拟的可靠性灵敏度分析方法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(4): 33-38
- [78] 张洁洁. 基于区间分析方法的不确定参数转子系统动力学特性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2016
- [79] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报, 2001, 18(1): 56-60
- [80] X. Du. Interval reliability analysis[C]. ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Las Vegas, 2007, 1103-1109
- [81] 毕仁贵. 考虑相关性的不确定凸集模型与非概率可靠性分析方法[D]. 长沙: 湖南大学, 2015
- [82] Z. Meng, H. Hu, H. Zhou. Super parametric convex model and its application for non-probabilistic reliability-based design optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 55: 354-370
- [83] 张哲. 基于证据理论的结构可靠性分析方法[D]. 长沙: 湖南大学, 2016
- [84] H. Guo, W. Shi, Y. Deng. Evaluating sensor reliability in classification problems based on evidence theory[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2006, 36(5): 970-981
- [85] W. M. Hirsch, M. Meisner, C. Boll. Cannibalization in multicomponent systems and theory of reliability[J]. Naval Research Logistics, 1968, 15(3): 331-360
- [86] 李春洋. 基于多态系统理论的可靠性分析与优化设计方法研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2010
- [87] 杨思航. 基于多态模糊故障树的纯电动客车高压电气系统可靠性分析[D]. 吉林: 吉林大学, 2016
- [88] A. Lisnianski, G. Levitin. Multi-state system reliability: assessment, optimization and applications[M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2003
- [89] Y. Gu, J. Li. Multi-state system reliability: a new and systematic review[J]. Procedia Engineering, 2012, 29: 531-536
- [90] L. Caldarolar. Coherent systems with multistate elements[J]. Nuclear Engineering and Design, 1980, 58(1): 127-139
- [91] X. Zang, N. Sun, K. S. Trivedi. A BDD-based algorithm for reliability analysis of phased-mission systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1999, 48(1): 50-60

- [92] X. Huang. Fault tree analysis method of a system having components of multiple failure modes[J]. *Microelectronics Reliability*, 1983, 23(2): 325-328
- [93] 刘晨曦, 陈南, 杨佳宁. 基于多态故障树的伺服刀架可靠性分析[J]. *东南大学学报(自然科学版)*, 2014, 44(3): 538-543
- [94] 王宁, 胡大伟. 基于多态多值决策图的多态故障树重要度计算方法[J]. *计算机集成制造系统*, 2015, 21(5): 1301-1308
- [95] Z. B. Zhou, C. Q. Ma, J. L. Zhou, et al. Multi-state fault tree analysis method based on Bayesian networks[J]. *Mathematics in Practice & Theory*, 2008, 38(19): 89-95
- [96] J. Hsieh, D. R. Ucci, G. D. Kraft. Multistate degradable system modelling and analysis[J]. *Electronics Letters*, 1989, 25(23): 1557-1558
- [97] D. Dascalu, D. C. Ionescu. Optimizing the maintenance strategy of multi-state systems with several failure modes[C]. *International Conference on Mathematical Methods in Reliability*, Trondheim, 2002
- [98] I. Frenkel, L. Khvatskin, A. Lisnianski. Markov reward model for performance deficiency calculation of refrigeration system[C]. *European Safety and Reliability Conference*, Prague, 2010
- [99] D. Chen, Y. Cao, K. S. Trivedi, et al. Preventive maintenance of multi-state system with phase-type failure time distribution and non-zero inspection time[J]. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 2003, 10(3): 323-344
- [100] G. S. Fishman. The distribution of maximum flow with applications to multistate reliability systems[J]. *Operations Research*, 1987, 35(4): 607-618
- [101] I. A. Ushakov. A universal generating function[J]. *Soviet Journal of Computer and Systems Sciences*, 1986, 24(5): 118-129
- [102] G. Levitin, A. Lisnianski, H. Ben-Haim, et al. Redundancy optimization for series-parallel multi-state systems[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 1998, 47(2): 165-172
- [103] G. Levitin. Reliability of multi-state systems with two failure-modes[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2003, 52(3): 340-348
- [104] A. Lisnianski, Y. Ding. Redundancy analysis for repairable multi-state system by using combined stochastic processes methods and universal generating function technique[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2009, 94(11): 1788-1795
- [105] Y. Ding, A. Lisnianski. Fuzzy universal generating functions for multi-state system reliability assessment[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 159 (3): 307-324
- [106] M. J. Zuo, Z. Tian. Performance evaluation of generalized multi-state k-out-of-n systems[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2006, 55 (2): 319-327

- [107] W. Li, M. J. Zuo. Reliability evaluation of multi-state weighted k-out-of-n systems[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2008, 93(1): 160-167
- [108] V. K. Sharma, M. Agarwal, K. Sen. Reliability evaluation and optimal design in heterogeneous multi-state series-parallel systems[J]. Information Sciences, 2011, 181(2): 362-378
- [109] G. Levitin, L. Xing. Reliability and performance of multi-state systems with propagated failures having selective effect[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2010, 95(6): 655-661
- [110] 郑静, 姜潮, 倪冰雨, 等. 随机-认知不确定性的相关性分析模型及可靠性计算方法[J]. 中国机械工程, 2016, 27(7): 925-933
- [111] 沈展鹏, 臧朝平, 陈学前, 等. 基于随机和认知不确定性分离的 PBX 构件可靠性分析[J]. 含能材料, 2017, 25(4): 333-341
- [112] 锁斌, 郭惠昕. 随机-认知混合不确定性下稳健性评价新指标[J]. 机械科学与技术, 2017, 36(6): 855-862
- [113] 谢少军. 复杂产品认知不确定性的混合可靠性分析方法研究[D]. 杭州: 浙江工业大学, 2016
- [114] 庞煜. 基于可能性理论和格论的系统可靠性分析[D]. 成都: 电子科技大学, 2012
- [115] 何俐萍. 基于可能性度量的机械系统可靠性分析和评价[D]. 大连: 大连理工大学, 2010
- [116] C. Jiang, Z. Zhang, X. Han, et al. A novel evidence-theory-based reliability analysis method for structures with epistemic uncertainty[J]. Computers & Structures, 2013, 129: 1-12
- [117] J. E. Hurtado, D. A. Alvarez, J. Ramírez. Fuzzy structural analysis based on fundamental reliability concepts[J]. Computers & Structures, 2012, 112: 183-192
- [118] C. Jiang, X. Han, G. Y. Lu, et al. Correlation analysis of non-probabilistic convex model and corresponding structural reliability technique[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(33): 2528-2546
- [119] Y. Luo, Z. Kang, A. Li. Structural reliability assessment based on probability and convex set mixed model[J]. Computers & Structures, 2009, 87(21): 1408-1415
- [120] Z. Kang, Y. Luo. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(41): 3228-3238
- [121] J. Choi, D. An, J. Won. Bayesian approach for structural reliability analysis and optimization using the Kriging dimension reduction method[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(5): 051003
- [122] X. Du, A. Sudjianto, B. Huang. Reliability-based design with the mixture of random and interval variables[J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127(6): 1068-1076

- [123] A. Pownuk. Efficient method of solution of large scale engineering problems with interval parameters[C]. NSF Workshop on Reliable Engineering Computing, Savannah, 2004
- [124] M. Modares, R. Mullen, R. L. Muhanna, et al. Buckling analysis of structures with uncertain properties and loads using an interval finite element method[C]. NSF Workshop on Reliable Engineering Computing, Savannah, 2004
- [125] S. C. Pereira, U. T. Mello, N. F. Ebecken, et al. Uncertainty in thermal basin modeling: an interval finite element approach[J]. *Reliable Computing*, 2006, 12(6): 451-470
- [126] J. Hall, J. Lawry. Imprecise probabilities of engineering system failure from random and fuzzy set reliability analysis[C]. *International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications*, New York, 2001
- [127] R. C. Penmetsa, R. V. Grandhi. Efficient estimation of structural reliability for problems with uncertain intervals[J]. *Computers & Structures*, 2002, 80(12): 1103-1112
- [128] J. C. Helton, J. D. Johnson, W. L. Oberkampf, et al. A sampling-based computational strategy for the representation of epistemic uncertainty in model predictions with evidence theory[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(37): 3980-3998
- [129] B. D. Youn, K. K. Choi, L. Du, et al. Integration of possibility-based optimization and robust design for epistemic uncertainty[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2007, 129(8): 876-882
- [130] J. Jakeman, M. Eldred, D. Xiu. Numerical approach for quantification of epistemic uncertainty[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(12): 4648-4663
- [131] M. Lombardi, R. T. Haftka. Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 157(1-2): 19-31
- [132] X. Gu, J. Renaud, S. Batill. An investigation of multidisciplinary design subject to uncertainty[C]. *AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, St. Louis, 1998
- [133] X. Du, W. Chen. An integrated methodology for uncertainty propagation and management in simulation-based systems design[J]. *AIAA Journal*, 2000, 38(8): 1471-1478
- [134] S. S. Rao, L. Cao. Optimum design of mechanical systems involving interval parameters[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2002, 124(3): 465-472
- [135] B. Möller, W. Graf, M. Beer. Fuzzy structural analysis using α -level optimization[J]. *Computational Mechanics*, 2000, 26(6): 547-565
- [136] M. Bagheri, M. Miri, N. Shabakhty. Fuzzy reliability analysis using a new alpha level set optimization approach based on particle swarm optimization[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2016, 30(1): 235-244

-
- [137] M. Miri, N. Shabakhty. Fuzzy time dependent structural reliability analysis using alpha level set optimization method based on genetic algorithm[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2017, 32(6): 4173-4182
- [138] X. Yang, Y. Liu, Y. Zhang, et al. Hybrid reliability analysis with both random and probability-box variables[J]. *Acta Mechanica*, 2015, 226(5): 1341-1357
- [139] N. C. Xiao, Y. F. Li, L. Yu, et al. Saddlepoint approximation-based reliability analysis method for structural systems with parameter uncertainties[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 2014, 228(5): 529-540
- [140] S. Gudder. Fuzzy probability theory[J]. *Demonstratio Math*, 1998, 31(3): 235-254
- [141] V. Kr äschmer. A unified approach to fuzzy random variables[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 123(1): 1-9
- [142] S. A. Starks, V. Kreinovich, L. Longpre, et al. Towards combining probabilistic and interval uncertainty in engineering calculations[C]. *NSF Workshop on Reliable Engineering Computing*, Savannah, 2004
- [143] V. Kreinovich, J. Beck, C. Ferregut, et al. Monte-Carlo-type techniques for processing interval uncertainty, and their engineering applications[C]. *NSF Workshop on Reliable Engineering Computing*, Savannah, 2004
- [144] X. Du, P. K. Venigella, D. Liu. Robust mechanism synthesis with random and interval variables[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(7): 1321-1337
- [145] X. Du, A. Sudjianto, B. Huang. Reliability-based design with the mixture of random and interval variables[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2005, 127(6): 1068-1076
- [146] B. D. Youn, K. K. Choi. An investigation of nonlinearity of reliability-based design optimization approaches[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 126(3): 403-411
- [147] B. D. Youn, K. K. Choi, Y. H. Park. Hybrid analysis method for reliability-based design optimization[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2003, 125(2): 221-232
- [148] B. D. Youn, K. K. Choi. A new response surface methodology for reliability-based design optimization[J]. *Computers & Structures*, 2004, 82(2-3): 241-256
- [149] G. Kharmanda, A. Mohamed, M. Lemaire. Efficient reliability-based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, 24(3): 233-245
- [150] Y. Noh, K. K. Choi, L. Du. Reliability-based design optimization of problems with correlated input variables using a Gaussian Copula[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 38(1): 1-16

- [151] P. B. Thanedar, S. Kodiyalam. Structural optimization using probabilistic constraints[J]. Structural Optimization, 1992, 4(3-4): 236-240
- [152] X. Chen, T. Hasselman, D. Neill, et al. Reliability based structural design optimization for practical applications[C]. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit and AIAA/ASME/AHS Adaptive Structural Forum, Kissimmee, 1997
- [153] N. Kuschel, R. Rackwitz. Optimal design under time-variant reliability constraints[J]. Structural Safety, 2000, 22(2): 113-127
- [154] X. Du, W. Chen. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design[J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(2), 225-233
- [155] T. Zou, S. Mahadevan. A direct decoupling approach for efficient reliability-based design optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2006, 31(3): 190
- [156] V. Dubourg, B. Sudret, J. M. Bourinet. Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 44(5): 673-690
- [157] X. Qu, R. T. Haftka. Reliability-based design optimization using probabilistic sufficiency factor[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, 27(5): 314-325
- [158] M. Papadrakakis, N. D. Lagaros. Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(32): 3491-3507
- [159] 张艳红, 陈善阳, 胡晓. 一种工程实用的数值积分方法[J]. 工程力学, 2005, 22(3): 39-45
- [160] 赵龙, 史震, 马澍田. 对无陀螺捷联惯性制导系统中的数值积分方法的讨论[J]. 弹箭与制导学报, 2001, 21(2): 11-15
- [161] Y. Ding, L. M. Zhu, X. J. Zhang, et al. Numerical integration method for prediction of milling stability[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2011, 133(3): 031005
- [162] G. H. Golub, J. H. Welsch. Calculation of Gauss quadrature rules[J]. Mathematics of Computation, 1969, 23(106): 221-230
- [163] P. N. Swarztrauber. On computing the points and weights for Gauss-Legendre quadrature[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2003, 24(3): 945-954
- [164] 胡天松. 基于故障维修数据的大型矿用挖掘机可靠性评估与分配[D]. 电子科技大学, 2015
- [165] R. C. Juvinall, K. M. Marshek. Fundamentals of machine component design[M]. New York: John Wiley & Sons, 2006

- [166] S. M. Ross. Introduction to probability and statistics for engineers and scientists[M]. New York: Wiley, 2014
- [167] X. Liu, L. Yin, L. Hu, et al. An efficient reliability analysis approach for structure based on probability and probability box models[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2017, 56(1): 167-181
- [168] X. Du, A. Sudjianto. First-order saddlepoint approximation for reliability analysis[J]. AIAA Journal, 2004, 42(6): 1199-1207
- [169] K. V. Yuen, J. Wang, S. K. Au. Application of saddlepoint approximation in reliability analysis of dynamic systems[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2007, 6(4): 391-400
- [170] B. Huang, X. Du. Probabilistic uncertainty analysis by mean-value first order saddlepoint approximation[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2008, 93(2): 325-336
- [171] B. Huang, X. Du, R. E. Lakshminarayana. A saddlepoint approximation based simulation method for uncertainty analysis[J]. International Journal of Reliability and Safety, 2006, 1(1-2): 206-224
- [172] H. E. Daniels. Saddlepoint approximations in statistics[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1954: 631-650
- [173] R. Lugannani, S. Rice. Saddlepoint approximation for the distribution of the sum of independent random variables[J]. Advances in Applied Probability, 1980, 12(2): 475-490
- [174] A. C. Davison, D. Mastropietro. Saddlepoint approximation for mixture models[J]. Biometrika, 2009, 96(2): 479-486
- [175] Z. Wang, H. Z. Huang, Y. Li, et al. An approach to system reliability analysis with fuzzy random variables[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 52: 35-46
- [176] C. E. Shannon, W. Weaver. The mathematical theory of communication[M]. Urbana: University of Illinois Press, 2002
- [177] E. Trillas, T. Riera. Entropies in finite fuzzy sets[J]. Information Sciences, 1978, 15(2): 159-168
- [178] C. B. Brown. Entropy constructed probabilities[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1980, 106(4): 633-640
- [179] T. Y. Kam, C. B. Brown. Updating parameters with fuzzy entropies[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1983, 109(6): 1334-1343
- [180] L. A. Zadeh. Probability measures of fuzzy events[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 23(2): 421-427
- [181] 《航空发动机设计手册》总编委会. 航空发动机设计手册(第三册)[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000

- [182] 郭书祥, 张陵, 李颖. 结构非概率可靠性指标的求解方法[J]. 计算力学学报, 2005, 22(2): 227-231
- [183] H. Zhang, R. L. Mullen, R. L. Muhanna. Interval Monte Carlo methods for structural reliability[J]. Structural Safety, 2010, 32(3): 183-190
- [184] A. Lisnianski, I. Frenkel, Y. Ding. Multi-state system reliability analysis and optimization for engineers and industrial managers[M]. London: Springer-Verlag, 2010
- [185] M. Dhar. Cardinality of fuzzy sets: an overview[J]. International Journal of Energy, Information and Communications, 2013, 4(1): 15-20
- [186] 汪忠来. 基于模型的不确定性优化设计方法研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2009
- [187] M. Hohenbichler, R. Rackwitz. First-order concepts in system reliability[J]. Structural Safety, 1982, 1(3): 177-188
- [188] M. Hohenbichler, S. Gollwitzer, W. Kruse, et al. New light on first-and second-order reliability methods[J]. Structural Safety, 1987, 4(4): 267-284
- [189] J. Zhang, X. Du. A second-order reliability method with first-order efficiency[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(10): 101006
- [190] K. Breitung. Asymptotic approximations for multinormal integrals[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1984, 110(3): 357-366
- [191] M. Rosenblatt. Remarks on a multivariate transformation[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1952, 23(3): 470-472
- [192] A. M. Hasofer, N. C. Lind. Exact and invariant second-moment code format[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1974, 100(1): 111-121
- [193] Y. T. Wu, H. R. Millwater, T. A. Cruse. Advanced probabilistic structural analysis method for implicit performance functions[J]. AIAA Journal, 1990, 28(9): 1663-1669
- [194] X. Du, W. Chen. A most probable point-based method for efficient uncertainty analysis[J]. Journal of Design and Manufacturing Automation, 2001, 4(1): 47-66
- [195] J. Tu, K. K. Choi, Y. H. Park. A new study on reliability-based design optimization[J]. Journal of Mechanical Design. 1999, 121(4): 557-564
- [196] H. Li, R. O. Foschi. An inverse reliability method and its application[J]. Structural Safety, 1998, 20(3): 257-270
- [197] A. D. Kiureghian, Y. Zhang, C. C. Li. Inverse reliability problem[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(5): 1154-1159
- [198] J. Tu, K. K. Choi, Y. H. Park. Design potential method for robust system parameter design[J]. AIAA Journal, 2001, 39(4): 667-677

- [199] K. K. Choi, J. Tu, Y. H. Park. Extensions of design potential concept for reliability-based design optimization to nonsmooth and extreme cases[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 22(5): 335-350
- [200] Y. T. Wu, Y. Shin, R. Sues. Safety-factor based approach for probabilistic-based design optimization[C]. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit, Seattle, 2001
- [201] Y. T. Wu. Efficient probabilistic design by converting reliability constraints to approximately equivalent deterministic constraints[J]. Journal of Inter-grated Design and Process Sciences, 1998, 2(4): 13-21
- [202] J. Liang, Z. P. Mourelatos, J. Tu. A single-loop method for reliability-based design optimization[C]. ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Salt Lake City, 2004
- [203] Z. Lei, Q. Chen. A new approach to fuzzy finite element analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(45): 5113-5118
- [204] C. Jiang, X. Han, G. R. Liu. Optimization of structures with uncertain constraints based on convex model and satisfaction degree of interval[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(49-52): 4791-4800
- [205] F. T. K. Au, Y. S. Cheng, L. G. Tham, et al. Robust design of structures using convex models[J]. Computers & Structures, 2003, 81(28-29): 2611-2619

攻读博士学位期间参与的科研项目及取得的成果

一、在学期间参与的项目研究

- [1] 国家自然科学基金项目：“基于故障物理技术的结构疲劳可靠性设计理论及其应用研究”，项目编号：11272082
- [2] 国家 863 计划项目：“大型挖掘机可靠性分析及设计的关键技术研究”，项目编号：2012AA062001
- [3] 国家自然科学基金项目：“不确定结构可靠寿命设计的时变高精度模型和序列优化问题研究”，项目编号：11472075

二、在学期间发表的学术论文与专利申请

- [1] **Xiaoqiang Zhang**, Huiying Gao, Hong-Zhong Huang. Total fatigue life prediction for welded joints based on initial and equivalent crack size determination[J]. International Journal of Damage Mechanics, 2018, 27(7): 1084-1104 (SCI 检索)
- [2] **Xiaoqiang Zhang**, Huiying Gao, Hong-Zhong Huang. A novel reliability analysis method for turbine discs with the mixture of fuzzy and probability-box variables[J]. International Journal of Turbo & Jet-Engines, 2018 (已录用, SCI 源刊)
- [3] **Xiaoqiang Zhang**, Huiying Gao, Hong-Zhong Huang, Yan-Feng Li, Jinhua Mi. Dynamic reliability modeling for system analysis under complex load[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2018 (二审修改后录用, SCI 源刊)
- [4] **Xiaoqiang Zhang**, Huiying Gao, Guo-Zhong Fu, Hong-Zhong Huang. Reliability analysis of filtering reducer considering the temperature correction and shock load of space[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University (Science), 2018, 23(3): 456-464 (EI 检索)
- [5] Zhonglai Wang, **Xiaoqiang Zhang**, Hong-Zhong Huang, Zissimos P. Mourelatos. A simulation method to estimate two types of time-varying failure rate of dynamic systems[J]. Journal of Mechanical Design, 2016, 138(12): 121404 (SCI 检索)
- [6] 高会英, **张小强**, 黄洪钟, 庞煜, 胡钧铭. 考虑 S-N 曲线不确定性的概率疲劳寿命预测[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48(1): 014605
- [7] **Xiaoqiang Zhang**, Huiying Gao, Hong-Zhong Huang, Xuefei Zhang. Reliability analysis of filtering reducer considering the temperature correction of space[C]. The 7th Asia-Pacific International Symposium on Advanced Reliability and Maintenance Modeling (APARM 2016), Seoul, 2016, 605-612

- [8] **Xiaoqiang Zhang**, Huiying Gao, Hong-Zhong Huang. A novel reliability calculation method based on fuzzy universal generating function[C]. Proceedings of 2017 International Conference on Materials and Reliability & 2017 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering (ICMR 2017 & QR2MSE 2017), 2017, Chengdu, 187-190
- [9] **张小强**, 黄洪钟, 俞水, 王志华, 赵铭. 大型可展开天线失效机理研究[C]. 2015 年航天可靠性学术交流会, 西安, 2015, 524-530
- [10] Zhonglai Wang, **Xiaoqiang Zhang**, Hong-Zhong Huang, Zissimos P. Mourelatos. A simulation method to estimate the time-varying failure rate of dynamic systems[C]. Proceedings of the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2014), New York, 2014, V02BT03A046 (EI 检索)
- [11] Huiying Gao, **Xiaoqiang Zhang**, Junming Hu. A generalized dynamic reliability model of system considering strength degradation and shock loads [C]. Proceedings of 2017 International Conference on Materials & Reliability and 2017 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering (ICMR 2017 & QR2MSE 2017), 2017, Chengdu, 182-186
- [12] Yi-Chao Yin, **Xiaoqiang Zhang**, Hong-Zhong Huang. Imprecise probability method with the power-normal model for accelerated life testing[C]. Proceedings of 2017 International Conference on Materials and Reliability & 2017 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering (ICMR 2017 & QR2MSE 2017), 2017, Chengdu, 457-465
- [13] 张小玲, 黄协思, 韩旺, **张小强**, 张恒宾, 汪忠来. 一种基于 RNN 的结构时变可靠性评估方法, 中国, 发明专利, 专利号: 201711172543.1